

陽明論數

第一期 20220919

主辦單位：桃園市立陽明高中數學科

2022.09.19 公佈，2022.10.3 中午 12 點 30 分截止

本期主題：關於不等式的其中一種證明方法

不等式的證明有很多種，這裡研究其中一種證明方式

例如：已知 a, b 均為正實數，證明： $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (本題為著名的算幾不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$)

(key1：證明題不可使用舉例證明)

(key2：這類 $A \geq B$ 不等式，等價於 $A-B \geq 0$ 。故證明時常使用 $A-B$ 檢驗，期望能得出恆正或 0，因為判斷正負比較容易)

(key3：證明題注意：尚未證明前不可使用結論，也就是不可能一開始就知道 $A \geq B$ 或 $A-B \geq 0$ ，而是在檢驗 $A-B$ 途中根據一些原因發現它 ≥ 0 ，所以得證 $A-B \geq 0$ ，即得證 $A \geq B$)

[錯誤答題之一]：

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$ → 要你證明，結果你沒證，直接拿來用???

$\Rightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$ → 後面還要看嗎?你都拿結論來用了，你告訴我你有證???

$\Rightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$

故得證 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

[錯誤答題之二]：

$3+2 \geq 2\sqrt{6}$ → 舉例要舉出所有的可能，因為你怎麼知道你沒舉的例子是對是錯??

$2+2 \geq 2\sqrt{4}=4$ → 舉兩個代表全部??所以我跟你代表全世界?

→ 這題範圍內是所有正實數，舉到天荒地老也舉不完。

故得證 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

[正確解答之一]：

$a+b-2\sqrt{ab}$
 $=\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2-2\sqrt{ab}$
 $=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

因為平方恆 ≥ 0 ，所以 $a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$ ，故得證 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

本期問題：已知 a, b, c 均為正實數，證明：

(1) $2(a^8+b^8) \geq (a^3+b^3)(a^5+b^5)$

(2) $3(a^8+b^8+c^8) \geq (a^3+b^3+c^3)(a^5+b^5+c^5)$

(key1：證明題不可使用舉例證明)

(key2：這類 $A \geq B$ 不等式，等價於 $A-B \geq 0$ 。故證明時常使用 $A-B$ 檢驗，期望能得出恆正或 0，因為判斷正負比較容易)

(key3：證明題注意：尚未證明前不可使用結論，也就是不可能一開始就知道 $A \geq B$ 或 $A-B \geq 0$ ，而是在檢驗 $A-B$ 途中根據一些原因發現它 ≥ 0 ，所以得證 $A-B \geq 0$ ，即得證 $A \geq B$)