

陽明論數總積分

第 2 期 積分榜

陽明論數		第2期	
班級	座號	姓名	積分
104	26	陳彤恩	10
114	15	黃振銓	10
113	16	陳星男	10
116	21	王希文	10
209	6	陳許亨燦	10
303	19	游哲綸	10
303	29	卓季賢	10
303	35	黃于軒	10
307	1	呂致緯	10
308	19	施宇柔	10
308	27	黃資穎	10
305	01	王威皓	9
305	2	王新皓	9
203	21	楊宗侖	8
205	14	張家豪	8

總積分榜

陽明論數		1~2期	
班級	座號	姓名	總積分
307	1	呂致緯	20
209	6	陳許亨燦	20
303	29	卓季賢	20
308	27	黃資穎	20
305	2	王新皓	19
308	19	施宇柔	15
104	26	陳彤恩	10
114	15	黃振銓	10
113	16	陳星男	10
116	21	王希文	10
303	19	游哲綸	10
303	35	黃于軒	10
305	01	王威皓	9
203	21	楊宗侖	8
205	14	張家豪	8
207	34	章紫棠	5
113	1	王秉玄	3

陽明論數第二期總評&榮譽徽章頒獎

- 本期題目能看出同學各種不同的想法與聯想力，深深感受每位同學對創造規律函數的大膽嘗試與數字的敏感度，十分出色。
- 遞迴做法:如 11516 陳星男、30319 游哲綸、11621 王希文、30329 卓季賢、30335 黃于軒
- 迭代作法:如 30701 呂致緯、20906 陳許亨燦、30501 王威皓、30502 王新皓、20321 楊宗侖
- 數字規律:10426 陳彤恩、30819 施宇柔、11415 黃振銓、30827 黃資穎、20514 張家豪
- 以上同學都寫得很好，8 分及 9 分僅為撰寫不清或些微小瑕疵。下面提供 4 種不同答題。
遞迴做法的代表: 11516 陳星男；
迭代做法的代表: 30701 呂致緯；
數字規律做法一: 10426 陳彤恩；
數字規律做法二: 30819 施宇柔。
- 非常開心同學們有各種不同的解法，眾多解法之中一定有比較漂亮、迅速有利的做法。
遞迴做法與迭代做法適用於各種題目，通用性高，各種題目都可以用這種模式做；
數字規律走的路線可能比較吃數感狀況，但也不失為一種數字敏感度的訓練，能夠推出來也是值得稱讚的，但建議還是可以學習遞迴或迭代。
- 榮譽徽章以擇優頒發為基礎，故本期榮譽徽章得主為：11516 陳星男、30319 游哲綸、11621 王希文、30329 卓季賢、30335 黃于軒、30701 呂致緯、20906 陳許亨燦
- 歡迎各位同學來數學科辦公室領取第一期&第二期考卷。
- 以下同學可於周三中午來數學科領取榮譽徽章。(或於其他時間來數學科找賴瑞琪老師)

第一期：30701 呂致緯，20906 陳許亨燦、30329 卓季賢、30502 王新皓、30827 黃資穎

第二期：11516 陳星男、30319 游哲綸、11621 王希文、30329 卓季賢、30335 黃于軒、30701 呂致緯、20906 陳許亨燦

陽明論數

第二期 20221003

主辦單位：桃園市立陽明高中數學科
2022.10.03 公佈，2022.10.17 中午 12 點 30 分截止

本期問題：

設 f 為 $N \rightarrow R$ 的函數，

(表示 $f(x)$ 輸入 x 可得到 $f(x)$ ，寫成 $x \rightarrow f(x)$ ，其中 x 範圍為正整數 N ， $f(x)$ 範圍為實數 R)，
且滿足以下條件：

$$(1) f(1) = \frac{3}{2}$$

$$(2) \text{對於所有正整數 } x, \text{ 恆有 } f(x+1) = \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) f(x) + \left(1 + \frac{x}{2}\right) f(1) + x^2 + 2x$$

求 $f(112)$ 之值

[解答]

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \left(\frac{x+2}{x+1}\right) f(x) + \left(\frac{x+2}{2}\right) \times \frac{3}{2} + x(x+2x) \\ &= (x+2) \left[\frac{f(x)}{x+1} + \frac{3}{4} + x \right] \\ \frac{f(x+1)}{x+2} &= \frac{f(x)}{x+1} + \frac{3}{4} + x \end{aligned}$$

$$\text{當 } x=1 \text{ 時, } \frac{f(2)}{3} = \frac{f(1)}{2} + \frac{3}{4} + 1$$

$$\text{當 } x=2 \text{ 時, } \frac{f(3)}{4} = \frac{f(2)}{3} + \frac{3}{4} + 2$$

$$\text{當 } x=3 \text{ 時, } \frac{f(4)}{5} = \frac{f(3)}{4} + \frac{3}{4} + 3$$

$\vdots$

$$\text{當 } x=111 \text{ 時, } \frac{f(112)}{113} = \frac{f(111)}{112} + \frac{3}{4} + 111$$

將 $x=1$ 到 $x=111$ 的式子全部相加並兩邊對消相同項可得到：

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{f(112)}{113} &= \frac{f(1)}{2} + \frac{3}{4} \times 111 + (1+2+3+\cdots+111) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \times 111 + \frac{(1+111) \times 111}{2} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{333}{4} + 6216 \\ &= 6300 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(112) = 6300 \times 113 = 711900$$

答：711900

陽明論數 答案紙

第 2 期 本期發布日期：10/3

班級：115 座號：16 姓名：陳聖恩

主辦單位：桃園市立陽明高中數學科

注意事項1：請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項2：請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

$$f(x+1) = \left(\frac{x+2}{x+1}\right)f(x) + \frac{x+2}{2} \cdot f(1) + x(x+2)$$

$$\because f(1) = \frac{3}{2}, \therefore f(x+1) = \frac{x+2}{x+1} \cdot f(x) + \frac{x+2}{2} \cdot \frac{3}{2} + x(x+2)$$

$$f(x+1) = (x+2) \left[\frac{f(x)}{x+1} + \frac{3}{4} + x \right] \Rightarrow \frac{f(x+1)}{(x+2)} - \frac{f(x)}{(x+1)} = x + \frac{3}{4}$$

$$\text{則：} x=1, \frac{f(2)}{3} - \frac{f(1)}{2} = 1 + \frac{3}{4}$$

$$x=2, \frac{f(3)}{4} - \frac{f(2)}{3} = 2 + \frac{3}{4}$$

$$x=111, \frac{f(112)}{113} - \frac{f(111)}{112} = 111 + \frac{3}{4}$$

$$\frac{f(112)}{113} - \frac{f(1)}{2} = \sum_{k=1}^{111} (k) + \frac{3}{4} \times 111$$

$$\text{又 } f(1) = \frac{3}{2}, \text{ 故 } \frac{f(112)}{113} = \frac{3}{4} + 6212 + \frac{333}{4}$$

$$f(112) = 113(84 + 6212) = 711900 \neq$$

評：能發現要將 $(x+2)$ 除至左式 $f(x+1)$ ，
進而使用遞迴型規律加在一起相消，
實屬難得，很有數感！

A: 711900

陽明論數 答案紙

第 二 期 本期發布日期: 2022/10/3
 班級: 307 座號: 1 姓名: 呂致緯

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

$$f(1) = \frac{3}{2}$$

$$f(x+1) = \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) f(x) + \left(1 + \frac{x}{2}\right) f(1) + x^2 + 2x$$

$$= \left(\frac{x+2}{x+1}\right) f(x) + \left(\frac{x+2}{2}\right) f(1) + x(x+2)$$

$$= (x+2) \left(\frac{f(x)}{x+1} + \frac{f(1)}{2} + x \right)$$

$$x \text{ 代 } 1 \rightarrow \boxed{f(2)} = 3 \times \left(\frac{f(1)}{2} + \frac{f(1)}{2} + 1 \right) \quad \text{--- ①}$$

$$x \text{ 代 } 2 \rightarrow \boxed{f(3)} = 4 \times \left(\frac{f(2)}{3} + \frac{f(1)}{2} + 2 \right) \quad \text{--- ②}$$

$$x \text{ 代 } 3 \rightarrow f(4) = 5 \times \left(\frac{f(3)}{4} + \frac{f(1)}{2} + 3 \right) \quad \text{--- ③}$$

②式中的 $\frac{f(2)}{3}$ 可由 ① 整理成

$$\frac{f(1)}{2} + \frac{f(1)}{2} + 1$$

$$\rightarrow \text{②} \cdot f(3) = 4 \times \left(\frac{f(1)}{2} + \frac{f(1)}{2} + 1 + \frac{f(1)}{2} + 2 \right)$$

同理, ③式中的 $\frac{f(3)}{4}$ 可整理成

$$\frac{f(2)}{3} + \frac{f(1)}{2} + 2 = \frac{f(1)}{2} + \frac{f(1)}{2} + 1 + \frac{f(1)}{2} + 2$$

$$\rightarrow \text{③} \cdot f(4) = 5 \times \left(\frac{f(1)}{2} + \frac{f(1)}{2} + 1 + \frac{f(1)}{2} + 2 + \frac{f(1)}{2} + 3 \right)$$

整理可得:

$$\text{①} \cdot f(2) = 3 \times \left(\frac{f(1)}{2} \times 2 + 1 \right)$$

$$\text{②} \cdot f(3) = 4 \times \left(\frac{f(1)}{2} \times 3 + 1 + 2 \right)$$

$$\text{③} \cdot f(4) = 5 \times \left(\frac{f(1)}{2} \times 4 + 1 + 2 + 3 \right)$$

...

$$\begin{aligned} \rightarrow f(x) &= (x+1) \left[\frac{f(1)}{2} \times x + 1 + 2 + \dots + (x-1) \right] \\ &= (x+1) \left[\frac{f(1)}{2} \times x + \frac{(x-1)(1+x-1)}{2} \right] \\ &= (x+1) \left[\frac{f(1)}{2} \times x + \frac{x(x-1)}{2} \right] \\ &= \frac{x}{2} (x+1) (f(1) + x-1) \end{aligned}$$

$$f(112) = \frac{112}{2} \times 113 \times \left(\frac{3}{2} + 112 - 1 \right)$$

$$= 56 \times 113 \times \frac{225}{2}$$

$$= 28 \times 113 \times 225$$

$$= 711900 \quad \#$$

$$A \cdot f(112) = 711900$$

$$x=1, f(1) = \frac{3}{2}$$

評: 大膽細心, 聯想, 犀利, 寫得完整清楚! 非常好!

陽明論數 答案紙

第 二 期 本期發布日期: 2022.10.03
 班級: 104 座號: 26 姓名: 陳承恩

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

$$f(x+1) = (1+\frac{1}{x+1})f(x) + (1+\frac{x}{2})f(1) + x^2 + 2x \text{ 且 } f(1) = \frac{3}{2}$$

$$f(x+1) = f(x) + \frac{f(x)}{x+1} + \frac{3x+2}{4} + (x+1)^2$$

$$\therefore f(1+1) = f(2) = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} + 4 = \frac{15}{2}$$

$$f(2+1) = f(3) = \frac{15}{2} + \frac{5}{2} + \frac{4}{2} + 9 = 21$$

$$f(3+1) = f(4) = \frac{42}{2} + \frac{21}{2} + \frac{11}{2} + 16 = 45$$

$$f(4+1) = f(5) = \frac{90}{2} + \frac{45}{2} + \frac{7}{2} + 25 = \frac{165}{2}$$

$$\frac{f(1)}{1} = \frac{3}{2} = \frac{6}{4} \quad \left. \begin{array}{l} \text{相差 } \frac{9}{4} \\ \text{相差 } \frac{4}{4} = 1 \end{array} \right\}$$

$$\frac{f(2)}{2} = \frac{15}{2} = \frac{15}{4} \quad \left. \begin{array}{l} \text{相差 } \frac{13}{4} \\ \text{相差 } \frac{4}{4} = 1 \end{array} \right\}$$

$$\frac{f(3)}{3} = 7 = \frac{28}{4} \quad \left. \begin{array}{l} \text{相差 } \frac{17}{4} \\ \text{相差 } \frac{4}{4} = 1 \end{array} \right\}$$

$$\frac{f(4)}{4} = \frac{45}{4} = \frac{45}{4} \quad \left. \begin{array}{l} \text{相差 } \frac{21}{4} \end{array} \right\}$$

$$\frac{f(5)}{5} = \frac{165}{10} = \frac{66}{4}$$

$$\frac{15}{4} - \frac{6}{4} = \frac{9}{4} \quad \frac{28}{4} - \frac{15}{4} = \frac{13}{4}$$

$$\frac{45}{4} - \frac{28}{4} = \frac{17}{4} \quad \frac{66}{4} - \frac{45}{4} = \frac{21}{4}$$

$$\therefore \text{設 } f(112) = 112 \times y, \frac{f(112)}{112} = y$$

$$\text{設數列 } \frac{9}{4}, \frac{13}{4}, \frac{17}{4}, \frac{21}{4}, \dots \text{ 為數列 } A \text{ 公差 } = \frac{4}{4} = 1$$

$$\frac{f(2)}{2} - \frac{f(1)}{1} = A_1$$

$$\frac{f(3)}{3} - \frac{f(1)}{1} = A_1 + A_2$$

$$\frac{f(4)}{4} - \frac{f(1)}{1} = A_1 + A_2 + A_3$$

$$\Rightarrow \frac{f(112)}{112} - \frac{f(1)}{1} = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{110} + A_{111}$$

$$\frac{111(2 \times \frac{9}{4} + 110)}{2} = \frac{111 \times \frac{229}{2}}{2} = \frac{25419}{4}$$

$$\frac{25419}{4} + \frac{6}{4} = \frac{f(112)}{112} = \frac{25425}{4}$$

$$f(112) = \frac{25425}{4} \times 112 = 25425 \times 28 = 711900$$

$$A: f(112) = 711900$$

評語: 利用對數字的敏感, 以及耐心觀察兩層數字差, 找出能夠運用的規律, 實屬佳作!

陽明論數 答案紙

第 二 期 本期發布日期: 2022.10.03
班級: 308 座號: 19 姓名: 張幸豪

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

$$f(1) = \frac{3}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = \frac{3 \times 1^2}{2}$$

$$x=1, f(2) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{3}{2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{3}{2} + 1 + 2 = \frac{15}{2} = \frac{3 \times 5}{2} = \frac{3 \times (1^2 + 2^2)}{2}$$

$$x=2, f(3) = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \frac{15}{2} + \left(1 + \frac{2}{3}\right) \frac{3}{2} + 4 + 4 = 21 = \frac{3 \times 14}{2} = \frac{3 \times (1^2 + 2^2 + 3^2)}{2}$$

$$x=3, f(4) = \left(1 + \frac{1}{4}\right) 21 + \left(1 + \frac{3}{4}\right) \frac{3}{2} + 9 + 6 = 45 = \frac{3 \times 30}{2} = \frac{3 \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)}{2}$$

$$\text{guess } f(x+1) = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x+1}\right) f(x)}_{\text{左式}} + \underbrace{\left(1 + \frac{x}{2}\right) f(1)}_{\text{右式}} + x^2 + 2x = \frac{3}{2} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (x+1)^2]$$

pf: ①

$$x=1 \text{ 代入, 左式} = \frac{15}{2}, \text{右式} = \frac{1}{4} \times 2 \times 3 \times 5 = \frac{15}{2}$$

(由①可知)

$$\text{右式} = \frac{3}{2} \times \frac{(x+1)(x+2)(2x+3)}{6} = \frac{1}{4} (x+1)(x+2)(2x+3)$$

② 設 $x=k$ 成立, 即 $\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) f(k) + \left(1 + \frac{k}{2}\right) f(1) + k^2 + 2k = \frac{1}{4} (k+1)(k+2)(2k+3)$

當 $x=k+1$ 時, 左式 = $\left(1 + \frac{1}{k+2}\right) f(k+1) + \left(1 + \frac{k+1}{2}\right) f(1) + (k+1)^2 + 2(k+1)$

$$= \left(1 + \frac{1}{k+2}\right) \frac{1}{4} (k+1)(k+2)(2k+3) + \left(1 + \frac{k+1}{2}\right) \frac{3}{2} + (k+1)^2 + 2(k+1)$$

$$= \frac{k+3}{k+2} \times \frac{1}{4} (k+1)(k+2)(2k+3) + \frac{k+3}{2} \times \frac{3}{2} + (k+1)^2 + 2(k+1)$$

$$= \frac{1}{4} (k+3)(k+1)(2k+3) + \frac{3(k+3)}{4} + (k+1)(k+3) = \frac{1}{4} (k+3) [(k+1)(2k+3) + 3 + 4(k+1)]$$

$$= \frac{1}{4} (k+3) (2k^2 + 9k + 10) = \frac{1}{4} (k+3) (k+2)(2k+5) = \frac{1}{4} (k+1+1)(k+1+2) [2(k+1)+3]$$

$$= \text{右式} \therefore \text{成立 由數學歸納法得證}$$

故 $f(112) = \frac{1}{4} \times 112 \times 113 \times 225 = 711900$

評: 由敏銳的數感看出規律, 並能周全以數學歸納法證明, 相當出色!