

陽明論數積分

第 8 期 積分榜

陽明論數		第8期	
班級	座號	姓名	積分
101	03	呂奕成	10
101	05	李庭鈞	10
101	09	林室澄	10
105	02	王楷翔	10
105	10	陳宇翔	10
109	32	陳奕樺	10
114	15	黃振銓	10
115	16	陳星男	10
201	17	楊士緯	10
203	02	李俊緯	10
203	19	游騰緒	10
203	21	楊宗倫	10
203	34	游苡婕	10
209	06	陳許亨燦	10
308	19	施宇柔	10
308	27	黃資穎	10
101	02	吳松豫	9
116	21	王希文	6
209	13	蔣季憲	5

陽明論數第 8 期總評

- 1.本期題目參考詳解是由關係式推出遞迴式，並且此遞迴式擁有極好的規律性質，可以推得一般項公式或是任意一項。投稿同學大多能判斷正確的規律進而得出答案，少數幾位同學計算稍微粗心或有些微瑕疵，但整體表現都很優異。
- 2.這期表現都很棒，從中選出撰寫較為完整的幾份優良寫法給大家參考，分別為：
10109 林室澄、20906 陳許亨燦、30819 施宇柔、30827 黃資穎

陽明論數第 8 期獎勵

- 1.本學期獎勵為陽明論數戳章，將會給予**所有參與同學**一張專用陽明論數證書卡，供參加的所有同學蓋上參加戳章、優良戳章(5-9 分)、傑出戳章(10 分)。(證書與戳章目前正在送件製作中，還請本期同學等待通知，造成不便請多見諒)
- 2.可以來數學科辦公室找賴瑞琪老師拿回原稿，歡迎同學踴躍參加，並可以使用原稿、證書、戳章、心得來製作學習歷程檔案。
- 3.戳章圖案和 FB 粉絲專頁：
“趣學數學 HFIMath” 合作。
使用圖片已通過該社群許可，
有許多有趣的數學迷因，
歡迎有興趣同學去看看~

陽明 優良
論數 戳章

陽明論數

第八期 20230220

主辦單位：桃園市立陽明高中數學科
2023.02.20 (一)公佈，2023.03.03(五)中午 12 點 30 分截止

本期問題：

對於所有正整數 $n \geq 2$ 恆滿足 $2f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \dots + f(n) = n^2 f(n)$ ，

若 $f(1) = 2023$ ，則 $f(2023) = ?$

[參考解答]

1. 當 $n = k$ (其中 $k \geq 2$)，得第 1 式為 $2f(1) + f(2) + \dots + f(k) = k^2 f(k)$

當 $n = k+1$ ，得第 2 式為 $2f(1) + f(2) + \dots + f(k) + f(k+1) = (k+1)^2 \times f(k+1)$

第 2 式 - 第 1 式 得 $f(k+1) = (k+1)^2 \times f(k+1) - k^2 f(k)$

$$\Rightarrow k^2 f(k) = [(k+1)^2 - 1] \times f(k+1)$$

$$\Rightarrow k^2 f(k) = [k(k+2)] \times f(k+1)$$

$$\Rightarrow k \times f(k) = (k+2) \times f(k+1)$$

$$\Rightarrow f(k+1) = \frac{k}{k+2} f(k) \text{ 對於所有 } k \geq 2$$

$$\Rightarrow f(2023) = \frac{2022}{2024} f(2022) = \frac{2022}{2024} \times \frac{2021}{2023} f(2021) = \frac{2022}{2024} \times \frac{2021}{2023} \times \frac{2020}{2022} f(2020)$$

$$\Rightarrow f(2023) = \frac{2022}{2024} \times \frac{2021}{2023} \times \frac{2020}{2022} \times \frac{2019}{2021} \times \dots \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} f(2) = \frac{3}{2024} \times \frac{2}{2023} f(2)$$

2. 當 $n = 2$ ，則 $2f(1) + f(2) = 2^2 f(2)$ 。所以 $f(2) = \frac{2}{3} f(1) = \frac{2}{3} \times 2023$

3. 綜合 1.2.

$$f(2023) = \frac{3}{2024} \times \frac{2}{2023} f(2) = \frac{3}{2024} \times \frac{2}{2023} \times \frac{2}{3} \times 2023 = \frac{1}{506}$$

答： $\frac{1}{506}$

陽明論數 答案紙

第 11 期 本期發布日期: 2023.02.20
班級: 101 座號: 9 姓名: 林宇澄

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

(1) $f(1) = 2023$

(2) $2f(1) + f(2) = 2^2 f(2) \Rightarrow f(2) = \frac{2}{3} f(1)$

(3) $2f(1) + f(2) + f(3) = 3^2 f(3)$
 $\Rightarrow 2^2 f(2) = (3^2 - 1) f(3) \Rightarrow f(3) = \frac{2^2}{2 \times 4} f(2)$

(4) $2f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 4^2 f(4)$
 $\Rightarrow 3^2 f(3) = (4^2 - 1) f(4) \Rightarrow f(4) = \frac{3^2}{3 \times 5} f(3)$

(5) 由(3)、(4)判斷出

$$\Rightarrow f(n) = \frac{(n-1)^2}{(n-1)(n+1)} \cdot f(n-1)$$
$$= \frac{n-1}{n+1} \cdot f(n-1), n \geq 3$$

由(1)~(5)可知

$$\begin{cases} f(1) = 2023 \\ f(2) = \frac{2}{3} f(1) \\ f(n) = \frac{n-1}{n+1} \cdot f(n-1), n \geq 3 \end{cases}$$

$$\therefore f(2023) = \frac{2022}{2024} \times f(2022)$$

$$= \frac{2022}{2024} \times \frac{2021}{2023} \times f(2021)$$

$$= \frac{2022}{2024} \times \frac{2021}{2023} \times \frac{2020}{2022} \times \cdots \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times f(2)$$

$$= \frac{2022}{2024} \times \frac{2021}{2023} \times \frac{2020}{2022} \times \cdots \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times f(1)$$

$$= \frac{2022}{2024} \times \frac{2021}{2023} \times \frac{2020}{2022} \times \cdots \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times 2023$$

$$= \frac{1}{2024} \times 2 \times 2$$

$$= \frac{1}{506} \quad \#$$

表達完整, 邏輯清楚, Good!

陽明論數 答案紙

第 11 期 本期發布日期: 20230220
班級: 209 座號: 6 姓名: 陳明燦

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

$$n=2, 2f(1) + f(2) = 2^2 f(2)$$

$$2f(1) = 3f(2), \frac{f(2)}{f(1)} = \frac{2}{3}$$

$$n=3, \underbrace{2f(1) + f(2)}_{2^2 f(2)} + f(3) = 3^2 f(3)$$

$$\Rightarrow 2^2 f(2) = (3^2 - 1)f(3), \frac{f(3)}{f(2)} = \frac{2^2}{3^2 - 1} = \frac{2}{4}$$

$$n=4, \underbrace{2f(1) + f(2) + f(3)}_{3^2 f(3)} + f(4) = 4^2 f(4)$$

$$\Rightarrow 3^2 f(3) = (4^2 - 1)f(4) \Rightarrow \frac{f(4)}{f(3)} = \frac{3^2}{4^2 - 1} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{f(n)}{f(n-1)} = \frac{(n-1)^2}{n^2 - 1} = \frac{(n-1)^2}{(n+1)(n-1)} \quad (n \neq 1)$$

$$\Rightarrow \frac{f(n)}{f(n+1)} = \frac{n-1}{n+1} \quad (n \geq 3)$$

$$\frac{f(2)}{f(1)} \times \frac{f(3)}{f(2)} \times \frac{f(4)}{f(3)} \times \dots \times \frac{f(2022)}{f(2021)} \times \frac{f(2023)}{f(2022)}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{6} \times \dots \times \frac{2021}{2023} \times \frac{2022}{2024}$$

$$\Rightarrow \frac{f(2023)}{f(1)} = \frac{2 \times 2}{2023 \times 2024}$$

$$f(2023) = \frac{1}{506}$$

推理簡單明瞭, 過程清晰完整。Good!

陽明論數 答案紙

第 18 期 本期發布日期: 2023.02.20
班級: 308 座號: 19 姓名: 施彥豪

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

$$n^2 f(n) = 2f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) + f(n)$$

$$n^2 f(n) - f(n) = 2f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) = (n-1)^2 f(n-1)$$

$$f(n)(n^2 - 1) = (n-1)^2 f(n-1)$$

$$f(n)(n+1)(n-1) = f(n-1)(n-1)(n-1)$$

$$f(n) = \frac{f(n-1)(n-1)}{(n+1)}$$

$$n=2 \Rightarrow 4f(2) = 2f(1) + f(2)$$

$$3f(2) = 2f(1)$$

$$f(2) = \frac{2}{3}f(1)$$

$$f(3) = \frac{f(2) \times 2}{4} = \frac{1}{2}f(2)$$

$$f(4) = \frac{f(3) \times 3}{5} = \frac{3}{5}f(3)$$

$$f(5) = \frac{f(4) \times 4}{6} = \frac{2}{3}f(4)$$

$$f(2023) = \frac{f(2022) \times 2022}{2024} = \frac{2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 2022}{4 \times 5 \times 6 \times \dots \times 2024} f(2) = \frac{2 \times 3}{2023 \times 2024} f(2)$$

$$= \frac{2 \times 3}{2023 \times 2024} \times \frac{2}{3} \times 2023 = \frac{1}{506}$$

$n=1$ 與 $n=2$ 能明確理解需分開討論, 避免混淆,
過程流暢易懂, Good!

陽明論數 答案紙

第 18 期 本期發布日期: 2023.02.20
班級: 308 座號: 27 姓名: 黃資穎

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

$$\text{推測} f(n) = \frac{2}{n(n+1)} f(1) = \frac{4}{n(n+1)} f(1) \quad (n \geq 2)$$

$$f(n+1) = \frac{n^2 f(n)}{(n+1)^2 - 1}$$

(i) 當 $n=2$ 時

$$f(2) = \frac{4}{2 \times 3} f(1)$$

$$= \frac{2}{3} f(1) \cdots \text{與題幹相符}$$

$\therefore$ 當 $n=2$ 時成立

(ii) 假設當 $n=k$ 時成立

$$f(k) = \frac{4}{k(k+1)}$$

$$\text{則 } f(k+1) = \frac{k^2 f(k)}{(k+1)^2 - 1}$$

$$= \frac{\frac{4k}{k+1}}{k(k+2)}$$

$$= \frac{4}{(k+1)(k+2)} \cdots \text{與推測相符}$$

$\therefore$ 當 $n=k+1$ 時成立

$\therefore$ 由數學歸納法及 (i), (ii) 得證

$$\therefore f(2023) = \frac{4}{2023 \times 2024} \times 2023$$

$$= \frac{1}{506} \#$$

由數字關係性推測一般通式, 並能嚴謹證明, 做法完整, Good!