

陽明論數積分

第 10 期 積分榜

陽明論數		第10期	
班級	座號	姓名	積分
101	09	林0澄	10
115	16	陳0男	10
209	06	陳許0燦	10
308	27	黃0穎	10
209	13	蔣0憲	9
101	2	吳0豫	9
101	05	李0鈞	8
203	19	游0緒	6
203	21	楊0倫	2

8-10 期總積分榜

陽明論數		第8-10期	
班級	座號	姓名	積分
101	09	林0澄	30
115	16	陳0男	30
209	06	陳許0燦	30
308	27	黃0穎	30
101	05	李0鈞	28
101	2	吳0豫	23
203	21	楊0倫	22
209	13	蔣0憲	22
105	10	陳0翔	20
114	15	黃0銓	20
308	19	施0柔	20
203	19	游0緒	18
116	21	王0文	11
101	03	呂0成	10
105	02	王0翔	10
109	32	陳0樺	10
201	17	楊0緯	10
203	02	李0緯	10
203	34	游0婕	10

陽明論數第 10 期總評

1.本期題目使用多項式相等判斷 $Q(x)$ 的次數，然後藉由因式定理可以確認 $Q(2)$ 、 $Q(4)$ 、 $Q(6)$ ，再去掉不正確的幾個狀況即為正確答案。這期有投稿同學架構都相當正確，惟部分同學未去掉錯誤狀況，相當值得讚賞。本期分享四位 10 分同學優秀的稿件：10109 林 O 澄、11516 陳 O 男、20906 陳許 O 燦、30827 黃 O 穎。

陽明論數第 10 期獎勵

1.本學期獎勵為陽明論數戳章，將會給予所有參與同學一張專用陽明論數證書卡，供參加的所有同學蓋上參加戳章、優良戳章(5-9 分)、傑出戳章(10 分)。**證書與戳章已製作完畢，還請有參與第 8 期、第 9 期、第 10 期同學來數學科辦公室找賴瑞琪老師拿回原稿並領取證書，未來可用於學習歷程檔案。**

陽明論數

第十期 20230320

主辦單位：桃園市立陽明高中數學科

2023.03.20 公佈，2023.03.31 中午 12 點 30 分截止

本期問題：

設 $P(x) = (x-2)(x-4)(x-6)$ ， $R(x)$ 為三次多項式，試問可以找到多少個多項式 $Q(x)$ 使得 $P(Q(x)) = P(x) \cdot R(x)$ ？

[參考詳解]

$$P(Q(x)) = P(x) \cdot R(x)$$

$$\Rightarrow (Q(x)-2)(Q(x)-4)(Q(x)-6) = (x-2)(x-4)(x-6) \cdot R(x) \dots (1)$$

$\because (x-2)(x-4)(x-6) \cdot R(x)$ 為六次多項式 $\therefore Q(x)$ 為二次多項式

觀察 (1) 式，可發現代 $x=2$ 或 $x=4$ 或 $x=6$ 可消除未知多項式 $R(x)$ ，並且得到的值為 0

$$\begin{cases} (Q(2)-2)(Q(2)-4)(Q(2)-6)=0 \\ (Q(4)-2)(Q(4)-4)(Q(4)-6)=0 \\ (Q(6)-2)(Q(6)-4)(Q(6)-6)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(2)=2 \text{ 或 } 4 \text{ 或 } 6 \\ Q(4)=2 \text{ 或 } 4 \text{ 或 } 6 \\ Q(6)=2 \text{ 或 } 4 \text{ 或 } 6 \end{cases}$$

$Q(x)$ 為二次多項式，即 $Q(x) = ax^2 + bx + c$ ，其中 $a \neq 0$ ，給二次函數線上三點即可求出函數
所以如果能夠確定 $Q(2)$ 、 $Q(4)$ 、 $Q(6)$ 的值的話，即可確定 $y = Q(x)$ (但要注意不可為直線)

$Q(2)$ 有三個選擇

$Q(4)$ 有三個選擇

$Q(6)$ 有三個選擇

搭配起來共有 $3 \times 3 \times 3 = 27$ 種

但是 $y = Q(x)$ 為二次函數(圖形拋物線)，所以要去除一次函數及常數函數情形(圖形直線)
不和狀況有：

- | | |
|--|------|
| ① $Q(2)=2, Q(4)=2, Q(6)=2 \Rightarrow Q(x)=2$ | 常數函數 |
| ② $Q(2)=4, Q(4)=4, Q(6)=4 \Rightarrow Q(x)=4$ | 常數函數 |
| ③ $Q(2)=6, Q(4)=6, Q(6)=6 \Rightarrow Q(x)=6$ | 常數函數 |
| ④ $Q(2)=2, Q(4)=4, Q(6)=6 \Rightarrow Q(x)=x$ | 一次函數 |
| ⑤ $Q(2)=6, Q(4)=4, Q(6)=2 \Rightarrow Q(x)=-x+8$ | 一次函數 |

所以多項式 $Q(x)$ 共有 $27 - 5 = 22$ 種

答：22

陽明論數 答案紙

第 10 期 本期發布日期: 3/20
班級: 115 座號: 16 姓名: 陳維昇

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

$$\therefore \deg(P(x) \cdot R(x)) = 6$$

$$\therefore \deg(Q(x)) = 2$$

$$\therefore P(Q(2)) = 0 \quad \text{故 } Q(2), Q(4), Q(6)$$

$$P(Q(4)) = 0 \Rightarrow 2, 4, 6$$

$$P(Q(6)) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} Q(2) &= 2 \text{ or } 4 \text{ or } 6 \\ Q(4) &= 2 \text{ or } 4 \text{ or } 6 \\ Q(6) &= 2 \text{ or } 4 \text{ or } 6 \end{aligned}$$

共有 $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ 種排法

又須扣除 ① $Q(2)=2 \quad Q(4)=4 \quad Q(6)=6$ 斜直線

② $Q(2)=6 \quad Q(4)=4 \quad Q(6)=2$ 斜直線

③ $Q(2)=2 \quad Q(4)=2 \quad Q(6)=2$ 水平線

④ $Q(2)=4 \quad Q(4)=4 \quad Q(6)=4$ 水平線

⑤ $Q(2)=6 \quad Q(4)=6 \quad Q(6)=6$ 水平線

故有 $27 - 5 = 22$ 種

A 22

概念十分清楚, 細節處理十分周全, Good!

陽明論數 答案紙

第 十 期 本期發布日期: 2023.03.20
 班級: 101 座號: 9 姓名: 林宇澄

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

100
100
Good!

$$\deg P(x)=3, \deg R(x)=3 \Rightarrow \deg (P(x) \cdot R(x))=6 \Rightarrow \deg (P(R(x)))=6 \Rightarrow \deg Q(x)=2$$

$$\text{設 } Q(x)=ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$$

$$P(x)=(x-2)(x-4)(x-6) \Rightarrow P(2)=P(4)=P(6)=0$$

$$\Rightarrow P(Q(2))=P(Q(4))=P(Q(6))=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q(2)=2 \text{ or } 4 \text{ or } 6 \\ Q(4)=2 \text{ or } 4 \text{ or } 6 \\ Q(6)=2 \text{ or } 4 \text{ or } 6 \end{cases}$$

①	$Q(2)=4a+2b+c=$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4
②	$Q(4)=16a+4b+c=$	2	2	2	4	4	4	6	6	6	2	2	2	4	4
③	$Q(6)=36a+6b+c=$	2	4	6	2	4	6	2	4	6	2	4	6	2	4
④=③-①	$32a+4b=$	0	2	4	0	2	4	0	2	4	-2	0	2	-2	0
⑤=③-②	$20a+2b=$	0	2	4	-2	0	2	-4	-2	0	0	2	4	-2	0
⑥=⑤×2-④	$8a=$	0	2	4	-4	-2	0	-8	-6	-4	2	4	6	-2	0
	$a \neq 0$		✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
①	$Q(2)=4a+2b+c=$	4	4	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	
②	$Q(4)=16a+4b+c=$	4	6	6	6	2	2	2	4	4	4	6	6	6	
③	$Q(6)=36a+6b+c=$	6	2	4	6	2	4	6	2	4	6	2	4	6	
④=③-①	$32a+4b=$	2	-2	0	2	-4	-2	0	-4	-2	0	-4	-2	0	
⑤=③-②	$20a+2b=$	2	-4	-2	0	0	2	4	-2	0	2	-4	-2	0	
⑥=⑤×2-④	$8a=$	2	-6	-4	-2	4	6	8	0	2	4	-4	-2	0	
	$a \neq 0$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓		

以上運算結果得知:

$Q(x)$ 的 x^2 項係數 $a \neq 0$ 共 22 組

$\therefore$ 共 22 個多項式 $Q(x)$ 使得 $P(Q(x))=P(x) \cdot R(x)$

勇於嘗試, 判斷分析出眾, 細節嚴謹, 撰寫整齊! Good!

陽明論數 答案紙

第 十 期 本期發布日期: 2023.03.20.
 班級: 209 座號: 6 姓名: 陳詩豪

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

500

$$P: P(Q(x)) = P(x) \cdot R(x)$$

$$\Rightarrow (Q(x)-2)(Q(x)-4)(Q(x)-6) = (x-2)(x-4)(x-6) \cdot R(x)$$

$$\deg P \cdot R = 3+3=6 \Rightarrow \deg P(Q(x))=6 \Rightarrow \deg Q=2.$$

$$\text{若 } x=2 \Rightarrow (Q(2)-2)(Q(2)-4)(Q(2)-6)=0$$

$$\text{若 } x=4 \Rightarrow (Q(4)-2)(Q(4)-4)(Q(4)-6)=0$$

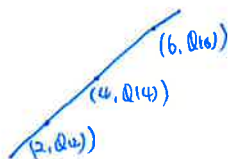
$$\text{若 } x=6 \Rightarrow (Q(6)-2)(Q(6)-4)(Q(6)-6)=0$$

$$\Rightarrow 3^3=27 \text{ (種)}$$

但 $\deg Q=2 \Rightarrow Q$ 不可為零次或一次函數

2° 若 $\deg Q=0$ 或 1

$$\Rightarrow Q(2)+Q(6)=2Q(4) \Rightarrow \text{中點}$$



$$2+2=2 \cdot 2 \Rightarrow Q(2)=2, Q(4)=2, Q(6)=2 \Rightarrow Q(x)=2, \deg Q=0$$

$$4+4=2 \cdot 4 \Rightarrow Q(2)=4, Q(4)=4, Q(6)=4 \Rightarrow Q(x)=4, \deg Q=0$$

$$6+6=2 \cdot 6 \Rightarrow Q(2)=6, Q(4)=6, Q(6)=6 \Rightarrow Q(x)=6, \deg Q=0$$

$$2+6=2 \cdot 4 \Rightarrow Q(2)=2, Q(4)=4, Q(6)=6 \Rightarrow Q(x)=x, \deg Q=1$$

$$6+2=2 \cdot 4 \Rightarrow Q(2)=6, Q(4)=4, Q(6)=2 \Rightarrow Q(x)=8-x, \deg Q=1$$

$\Rightarrow$ 以上五種不屬於 2 次函數 不合。

$$\Rightarrow 27-5=22 \text{ (種)}$$

多項式基本功扎实, 細節完整, Good!

陽明論數 答案紙

第 十 期 本期發布日期: 2023.03.20
班級: 208 座號: 27 姓名: 黃資穎

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

$$P(x) = (x-2)(x-4)(x-6)$$

$$P(Q(x)) = R(x) \cdot P(x)$$

六次式

$\therefore Q(x)$ 為二次多項式

① 當 $x=2, 4, 6$

$$\text{則 } P(Q(x)) = 0$$

$$\text{即 } Q(2 \text{ or } 4 \text{ or } 6) = 2 \text{ or } 4 \text{ or } 6$$

② 令 $Q(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2 & 4a+2b+c=Q(2) \text{ --- ①} \\ x=4 & 16a+4b+c=Q(4) \text{ --- ②} \\ x=6 & 36a+6b+c=Q(6) \text{ --- ③} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{②}-\text{①} & 12a+2b=Q(4)-Q(2) \\ \text{③}-\text{②} & 20a+2b=Q(6)-Q(4) \end{cases}$$

$$8a = Q(6) - 2Q(4) + Q(2)$$

若 $a=0$, 則 $Q(x)$ 不為二次式

$\therefore$ 當 $(Q(2), Q(4), Q(6))$ 為

$(2, 4, 6)$ or $(6, 4, 2)$ 不合

③ $\therefore Q(x)$ 為二次多項式

$$\therefore Q(2) \neq Q(4) \neq Q(6)$$

總結 ①, ②, ③ 可知

有效之 $(Q(2), Q(4), Q(6))$ 的組合為 $3^3 - 3 - 2 = 22$

即 $Q(x)$ 有 22 種可能 #

基礎能力扎实, 思路顺畅清晰, 细节处理严谨, Good!