

# 積分榜

## 第 17 期 積分榜

| 陽明論數 |      | 第17期 |
|------|------|------|
| 班級   | 姓名   | 積分   |
| 204  | 林0澄  | 10   |
| 303  | 薛0灝  | 10   |
| 303  | 游0緒  | 8    |
| 201  | 吳0豫  | 7    |
| 201  | 李0鈞  | 7    |
| 201  | 鄒0勳  | 7    |
| 303  | 楊0倫  | 7    |
| 113  | 羅0翹  | 6    |
| 201  | 陳0翔  | 6    |
| 309  | 陳許0燦 | 6    |

## 總積分榜

| 陽明論數 | 積分榜  | 16-17期 |
|------|------|--------|
| 班級   | 姓名   | 積分     |
| 204  | 林0澄  | 20     |
| 303  | 游0緒  | 18     |
| 303  | 楊0倫  | 17     |
| 309  | 陳許0燦 | 16     |
| 113  | 羅0翹  | 15     |
| 210  | 陳0男  | 10     |
| 303  | 薛0灝  | 10     |
| 109  | 張0坤  | 9      |
| 201  | 吳0豫  | 7      |
| 201  | 李0鈞  | 7      |
| 201  | 鄒0勳  | 7      |
| 201  | 陳0翔  | 6      |
| 112  | 蔡0祐  | 5      |

## 陽明論數第 17 期總評

1. 本期問題主要手法是使用乘法公式做因式分解，本期投稿踴躍，相當值得讚賞。並且能感覺出同學們的數學敏感度都非常高，惟可惜中了關於數學嚴謹性的陷阱，投稿同學數學能力皆很出眾，僅細節有點小瑕疵，這次中陷阱之後，相信下次會多多注意這個問題。以下說明本題常見錯誤：

### [本期問題]

若  $a, b$  為整數且  $ab \geq 0$ ，則滿足  $a^3 + b^3 + 75ab = 25^3$  的整數數對  $(a, b)$  有多少組？

### [以下為本期多數同學的寫法，稍缺嚴謹性]

$$a^3 + b^3 + 75ab = 25^3$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 = 25^3 - 75ab$$

$$\Rightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) = 25(25^2 - 3ab)$$

$$\Rightarrow (a+b)((a+b)^2 - 3ab) = 25(25^2 - 3ab) \dots (*)$$

※許多同學從上式推得  $a+b=25$ ，事實上(\*)此式不足以如此推斷

反之為何  $a+b$  為 5 時不成立？以此式而言不能說明  $a+b$  一定不為 5 或 125 或其他數字

舉例來說： $k(k^2 - t) = 25(25^2 - t)$ ，我們可以說  $k=25$  為其中一解，但還有許多狀況

而當  $k=5$  時， $5(5^2 - t) = 25(25^2 - t) \Rightarrow t=775$ ，並且可能尚有其他狀況

事實上，這題其他狀況會不成立，但以(\*)這種討論方式，需要說明更多不等於 25 時為何不成立，才具有嚴謹性。如無，這種做法偏向舉例法，但以數學說明來說，舉例法不能當作證明。故即使成功算出與答案相符的例子，也不能說是一個成功的寫法。

而是若只將因式分解處理到(\*)這式，並無法有效討論解的情形，邏輯上應將原式等號右邊製造出 0，等號左邊因式分解成多個小括號相乘，利用小括號相乘等於 0，得出的關係式較為周延。

### [參考詳解]

$$a^3 + b^3 + 75ab = 25^3$$

$$\Rightarrow (a+b)^3 - 3ab(a+b) + 75ab = 25^3$$

$$\Rightarrow (a+b)^3 - 25^3 - 3ab(a+b) + 75ab = 0$$

$$\Rightarrow (a+b-25)((a+b)^2 + 25(a+b) + 25^2) - 3ab(a+b-25) = 0$$

$$\Rightarrow (a+b-25)((a+b)^2 + 25(a+b) + 25^2 - 3ab) = 0$$

$$\Rightarrow (a+b-25)(a^2 - ab + b^2 + 25a + 25b + 25^2) = 0$$

$$\Rightarrow (a+b-25) \times \frac{1}{2} \times (2a^2 - 2ab + 2b^2 + 2 \times 25a + 2 \times 25b + 2 \times 25^2) = 0$$

$$\Rightarrow (a+b-25) \times \frac{1}{2} \times ((a-b)^2 + (a+25)^2 + (b+25)^2) = 0$$

故  $a+b=25$  或  $a=b=-25$

若  $a+b=25$ ，則  $(a,b)=(0,25),(1,24),(2,23),\dots,(24,1),(25,0)$  共 26 組

若  $a=b=-25$ ，則  $(a,b)=(-25,-25)$  共 1 組

共 27 組

答：27 組

2.本期有投稿的同學都寫得很好

①204 林同學、303 薛同學的寫法與公告的詳解方式大致相同，對乘法公式與因式分解運用自如，撰寫流暢完整，相當優秀。

②303 游同學也成功進行了因式分解，區分出兩個狀況，惟可惜其中一個狀況未能說明清楚。

③其餘同學皆能看出對數學的敏感度很好，真的是稍嫌可惜，缺乏嚴謹性，相信下次會更好。

3.本期 10 分同學(16 期滿分同學：204 林同學、210 陳同學、303 游同學、303 楊同學、309 陳許同學。17 期滿分同學：204 林同學、303 薛同學)都將獲得陽明論數徽章，但徽章尚未到貨，還請等待下期一並發放。另有戳章證書(學期末發)。歡迎同學於任意時間來數學科辦公室找賴瑞琪老師，領回原稿，可製作學習歷程檔案。

# 陽明論數

第 17 期 20230925

主辦單位：桃園市立陽明高中數學科  
2023.09.25 公佈，2023.10.06 中午 12 點 30 分截止

## 本期問題：

若  $a, b$  為整數且  $ab \geq 0$ ，則滿足  $a^3 + b^3 + 75ab = 25^3$  的整數數對  $(a, b)$  有多少組？

### [詳解]

$$a^3 + b^3 + 75ab = 25^3$$

$$\Rightarrow (a+b)^3 - 3ab(a+b) + 75ab = 25^3$$

$$\Rightarrow (a+b)^3 - 25^3 - 3ab(a+b) + 75ab = 0$$

$$\Rightarrow (a+b-25)((a+b)^2 + 25(a+b) + 25^2) - 3ab(a+b-25) = 0$$

$$\Rightarrow (a+b-25)((a+b)^2 + 25(a+b) + 25^2 - 3ab) = 0$$

$$\Rightarrow (a+b-25)(a^2 - ab + b^2 + 25a + 25b + 25^2) = 0$$

$$\Rightarrow (a+b-25) \times \frac{1}{2} \times (2a^2 - 2ab + 2b^2 + 2 \times 25a + 2 \times 25b + 2 \times 25^2) = 0$$

$$\Rightarrow (a+b-25) \times \frac{1}{2} \times ((a-b)^2 + (a+25)^2 + (b+25)^2) = 0$$

故  $a+b=25$  或  $a=b=-25$

若  $a+b=25$ ，則  $(a, b) = (0, 25), (1, 24), (2, 23), \dots, (24, 1), (25, 0)$  共 26 組

若  $a=b=-25$ ，則  $(a, b) = (-25, -25)$  共 1 組

共 27 組

答：27 組