

積分榜

第 18 期 積分榜

陽明論數		第18期
班級	姓名	積分
310	張0于	10
103	曹0銘	10
303	薛0灝	10
204	林0澄	10
303	游0緒	10
309	陳許0燦	10
303	楊0倫	10
202	王0甄	9
	羅00	1

總積分前 10 名

班級	姓名	積分
陽明論數	積分榜	16-18期
204	林0澄	30
303	游0緒	28
303	楊0倫	27
309	陳許0燦	26
303	薛0灝	20
113	羅0翊	16
210	陳0男	10
103	曹0銘	10
310	張0于	10
109	張0坤	9
202	王0甄	9

陽明論數第 18 期總評

1. 本期問題因逢期中考，投稿同學並不多，僅有 9 位，大多數投稿同學都寫成各種非常有意思的證明手法。本期題目雖為證明題，但是是一題不是這麼困難且具有非常多方向的題目，投稿同學一共寫出約 7 種不同方法，甚至有同學寫兩個方法。

同學投稿方法：相似形方法共 2 種，和差角方法共 3 種，面積方法共 1 種、座標化方法共 1 種。真的是相當出色。

參考詳解提供相似形、和差角、座標化各一種方法，PDF 檔最後會附上幾位撰寫優良同學的寫法供參考：相似形(204 林同學、303 游同學)、

和差角(310 張同學、202 王同學)

面積公式(303 楊同學)

座標化(309 陳許同學)

2.①310 張同學，在公布題目隔天一大早便投稿，而且撰寫漂亮，使用和差角簡單明瞭證明完成，寫得相當顯而易見。

②103 曹同學，能利用輔助線與相似形簡易地完成證明，很棒，惟撰寫過程建議格是再清楚一點，如：因為($\therefore$)、所以($\therefore$)的標示可以再明確一點。

③303 薛同學，非常有想法，使用和差角與輔助線相似形來證明，和差角方法寫得相當完整流暢，滿分；輔助線+相似形手法則稍嫌可惜，開頭上有不合理的地方(或者是說說明不完整導致奇怪的結論出現)，後續基本上也不太會看下去，評分上可能不會給分。

④204 林同學，輔助線與相似形的方法上呈現地相當清楚完整，堪為佳作。

⑤303 游同學，寫了面積公式與另一種輔助線_相似形的手法，兩個方法都寫得相當出色，惟撰寫時，變換式子時，多利用因為($\therefore$)、所以($\therefore$)敘述，以便閱讀。

⑥309 陳許同學，利用座標化，可以隨意切換幾何方法跟代數方法，能信手拈來各種想要的目標值，進而完成證明，相當不錯。

⑦303 楊同學，能利用面積性質細膩地推倒完成，也相當優秀，惟因為題目是開放式證明的問題，你撰寫式子時建議需要說明你在做的是面積相等，哪一個面積跟哪一個面積相等，直接寫數學式子需要閱卷老師猜測你的動作，略有說明不完全的問題，建議下次可以改善。

⑧202 王同學，可以善用基本三角函數與和差角公式，順暢地完成證明，表現優異。惟假設角度時有加”度”，後面卻沒有加，我們會視為”徑”，小小瑕疵，瑕不掩瑜。

⑨羅同學比較可惜了一點，開頭上有一個致命錯誤，令其中某角度為 45 度，特例不能當作至證明(除非證明因為什麼原因而該角度是 45 度)，即使後續都很合理，但證明題如果開頭就錯，後續基本上是不會給分的。

3.第 18 期滿分同學前 5 名：(依繳交先後排列)

310 張同學、103 曹同學、303 薛同學、204 林同學、303 游同學

第 17 期滿分同學：(依年級、班級由低而高排列)

204 林同學、303 薛同學

第 16 期滿分同學：(依年級、班級由低而高排列)

204 林同學、210 陳同學、303 游同學、303 楊同學、309 陳許同學
都將獲得陽明論數徽章，徽章已到貨，歡迎同學於任意時間來數學科辦公室找賴瑞琪老師，領取徽章與原稿，可製作學習歷程檔案。學期末會頒發戳章證書，總積分前十分另有獎狀。

陽明論數

第 18 期 20231011

主辦單位：桃園市立陽明高中數學科

2023.10.11 公佈，2023.10.20 中午 12 點 30 分截止

本期問題：

有一正方形 $PQRS$ 的邊長為 2，其中 PQ 邊上有一點 A ， PS 邊上有一點 B 。

證明：當三角形 PAB 周長為 4 時， $\angle ARB$ 恆為 45 度。

[參考解答]

(方法一：相似形)

將 PQ 線段往 Q 方向，向外做延伸線，於延伸線上取一點 C ，使得 $\overline{RC} = \overline{RB}$ ，

可得 $\triangle RSB \cong \triangle RQC$ (RHS 全等)

$$\angle BRC = \angle BRQ + \angle QRC = \angle BRQ + \angle SRB = 90^\circ$$

$$\therefore \overline{AB} = 4 - \overline{PA} - \overline{PB} = (2 - \overline{PA}) + (2 - \overline{PB}) = \overline{QA} + \overline{SB}，又 \overline{AC} = \overline{QA} + \overline{QC} = \overline{QA} + \overline{SB}，故 \overline{AB} = \overline{AC}$$

觀察 $\triangle ARB, \triangle ARC$ ，因為 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{RB} = \overline{RC}$ ， $\overline{AR} = \overline{AR}$ ，故 $\triangle ARB \cong \triangle ARC$ (SSS 全等)

令 $\angle ARB = \theta$ ，則 $\angle ARC = \theta$

由第一式可知： $2\theta = 90^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$ 得證。

(方法二：三角函數)

$$\overline{AP} = a, \overline{BP} = b, \overline{AB} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{周長為 } 4 \Rightarrow a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 4 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 4 - a - b \Rightarrow a^2 + b^2 = (4 - a - b)^2 \Rightarrow 2ab - 8a - 8b + 16 = 0 \\ \Rightarrow ab = 4a + 4b - 8$$

$$\text{令 } \angle ARQ = \alpha, \angle BRS = \beta, \angle ARB = \theta$$

$$\tan \theta = \tan(90^\circ - (\alpha + \beta)) = \cot(\alpha + \beta) = \frac{1}{\tan(\alpha + \beta)} = \frac{1 - \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} = \frac{1 - \frac{2-a}{2} \times \frac{2-b}{2}}{\frac{2-a}{2} + \frac{2-b}{2}} \\ = \frac{2a + 2b - ab}{8 - 2a - 2b} = \frac{2a + 2b - (4a + 4b - 8)}{8 - 2a - 2b} = 1$$

$$\theta = 45^\circ$$

(方法三：座標化，做直角三角形檢驗邊長比)

令 $P(0,0)$ ， $Q(2,0)$ ， $R(2,2)$ ， $S(0,2)$ ， $A(a,0)$ ， $B(0,b)$ ，

$$ab - 4a - 4b + 8 = 0 \Rightarrow a(b - 4) = 4b - 8 \Rightarrow a = \frac{4b - 8}{b - 4} = \frac{4(b - 4)}{b - 4} + \frac{8}{b - 4} = 4 + \frac{8}{b - 4}$$

$$\text{即 } a = 4 + \frac{8}{b - 4}$$

$$\text{利用點斜式求出 } \overline{AR}: y - 2 = \frac{2 - 0}{2 - a}(x - 2) \Rightarrow \overline{AR}: 2x + (a - 2)y - 2a = 0$$

作一直線過點 B ，垂直 $\overline{AR}$ 於 H 點，觀察直角三角形 BHR

$$\overline{BR} = \sqrt{2^2 + (b - 2)^2} = \sqrt{b^2 - 4b + 8}$$

$$\overline{BH} = \frac{|0 + (a - 2)b - 2a|}{\sqrt{2^2 + (a - 2)^2}} = \frac{|0 + (a - 2)b - 2a|}{\sqrt{2^2 + (a - 2)^2}} = \frac{|ab - 2a - 2b|}{\sqrt{2^2 + (a - 2)^2}} = \frac{|4a + 4b - 8 - 2a - 2b|}{\sqrt{2^2 + (a - 2)^2}} = \frac{|2a + 2b - 8|}{\sqrt{2^2 + (a - 2)^2}} \\ = \frac{|2(a - 4) + 2b|}{\sqrt{2^2 + (a - 2)^2}} = \frac{\left|2\left(\frac{8}{b - 4}\right) + 2b\right|}{\sqrt{2^2 + \left(4 + \frac{8}{b - 4} - 2\right)^2}} = \frac{|b - 4| \left|2\left(\frac{8}{b - 4}\right) + 2b\right|}{|b - 4| \sqrt{2^2 + \left(4 + \frac{8}{b - 4} - 2\right)^2}} = \frac{|16 + 2b(b - 4)|}{\sqrt{4(b - 4)^2 + \left(4 + \frac{8}{b - 4} - 2\right)^2}} \\ = \frac{|16 + 2b(b - 4)|}{\sqrt{4(b - 4)^2 + (2(b - 4) + 8)^2}} = \frac{|2b^2 - 8b + 16|}{\sqrt{8b^2 - 32b + 64}} = \frac{2|b^2 - 4b + 8|}{\sqrt{8}\sqrt{b^2 - 4b + 8}} = \frac{2\overline{BR}^2}{2\sqrt{2}\overline{BR}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{BR}$$

直角三角形邊長比為 $1:\sqrt{2}$ ，故 $\angle ARB$ 為 45° 。

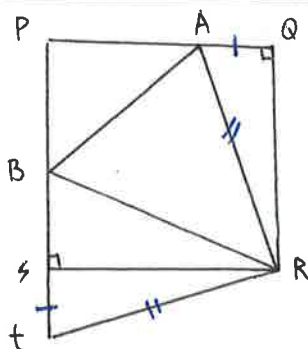
陽明論數 答案紙

第 18 期 本期發布日期: 2023.10.11
班級: 204 座號: 9 姓名: 林金澄

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。



已知: $\begin{cases} \triangle APB \text{ 周長} = 4 \\ \text{正方形邊長} = 2 \end{cases}$

求證: $\angle BRA = 45^\circ$

① 延長 $\overline{PS}$, 作一點 T 使 $ST = \overline{AR}$, 連 $\overline{TR}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{SR} = \overline{QR} \text{ (正方形邊長相等)} \\ \angle TSR = \angle AQR = 90^\circ \\ \overline{ST} = \overline{AR} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle SRT \cong \triangle QRA \text{ (SAS 全等)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \angle SRT = \angle ARQ \\ \overline{TR} = \overline{AR} \end{cases}$$

$$\triangle APB \text{ 周長} = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{AB} = 4 = \overline{PQ} + \overline{PS}$$

$$\Rightarrow \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{AB} = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{AQ} + \overline{BS}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = \overline{AQ} + \overline{BS} = \overline{BS} + \overline{ST}, \overline{AB} = \overline{BT}$$

$$\begin{cases} \overline{BT} = \overline{AB} \\ \overline{BR} = \overline{BR} \\ \overline{TR} = \overline{AR} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle BRT \cong \triangle BRA \text{ (SSS 全等)}$$

$$\Rightarrow \angle ARB = \angle BRT \text{ (對應角相等)}$$

$$\angle ARB = \angle BRT = \angle BRS + \angle SRT = \angle BRS + \angle ARQ$$

$$\Rightarrow \angle ARB = \angle BRS + \angle ARQ$$

$$\text{又 } \angle ARB + (\angle BRS + \angle ARQ) = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BRS + \angle ARQ = \angle ARB = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ \text{ 得證}$$

步驟完整流暢, 架構一目了然, 撰寫簡明舒服,

讚嘆優異!

Good!

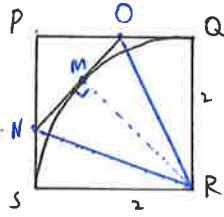
陽明論數 答案紙

第 18 期 本期發布日期: 2023/01/11
 班級: 303 座號: 19 姓名: 游月喬緒

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。



以 R 為圓心, SR 為半徑畫 $\frac{1}{4}$ 弧, 弧上一定點 M, 作切線切 M 點
 切線交 PQ 於 O 點, PS 於 N 點

連接 $RM \perp ON$

$$\therefore \overline{RM} = \overline{SR} = 2$$

$$\overline{NR} = \overline{NR}$$

$$\angle RMN = \angle RSN$$

$$\therefore \triangle NSR \cong \triangle NMR \text{ (RHS)}$$

$$\text{同理 } \overline{RM} = \overline{QR}, \overline{OR} = \overline{OR}$$

$$\angle RMO = \angle ORQ$$

$$\triangle RMO \cong \triangle ORQ \text{ (RHS)}$$

$$\therefore \overline{NM} = \overline{SN}, \overline{MO} = \overline{OQ}$$

$\therefore \triangle NPO$ 周長恆為 $\overline{PS} + \overline{PQ}$ 即 2 倍正方形邊長 4

根據題意 $\triangle APB$ 周長為 4 即 A 為 O 點, B 為 N 點, $\overline{AB}$ 為 $\overline{SQ}$ 的切線

$$\angle MRB = \angle MRN = \angle NRS, \angle MRA = \angle MRO = \angle ORQ$$

$$\text{可知 } \angle ARB = \angle ORN = \angle MRO + \angle MRN = \frac{1}{2} \angle SRQ = 45^\circ \quad \#$$

10 / 10

很特別的方法, 能抓到這個特性, 後續便能簡明地証出結論, 十分出色!

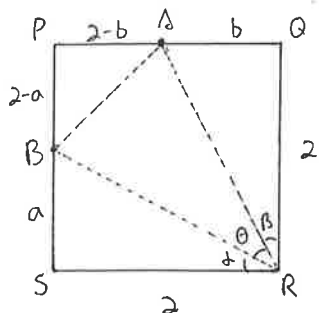
陽明論數 答案紙

第 18 期 本期發布日期: 10/11
 班級: 310 座號: 9 姓名: 張子予

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。



由題得左圖

試證當 $\triangle ABP$ 周長 = 4, $\angle ARB$ 恆 = 45°

令 $\angle BRS = \alpha$; $\angle ARQ = \beta$; $\angle ARB = \theta$

$$\overline{BS} = a; \overline{BP} = 2-a,$$

$$\overline{AQ} = b; \overline{AP} = 2-b,$$

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2} \\ &= \sqrt{(2-b)^2 + (2-a)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 - 4a - 4b + 8} \dots\dots ① \end{aligned}$$

又 $\triangle ABP$ 周長 = 4

$$\therefore \overline{AB} = a + b \dots\dots ②$$

由 ① ② 得

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + b^2 - 4a - 4b + 8} &= a + b \\ \left[\begin{array}{l} \text{等號} \\ \text{兩} \\ \text{邊} \\ \text{平} \\ \text{方} \end{array} \right] & a^2 + b^2 - 4a - 4b + 8 = a^2 + b^2 + 2ab \\ \text{整理} & 2a + 2b = 4 - ab \dots\dots ③ \end{aligned}$$

$$\because \angle QRS = 90^\circ$$

$\therefore$ 當 $\alpha + \beta = 45^\circ$ 時, 則 θ 必為 45°

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} \\ &= \frac{\frac{a}{2} + \frac{b}{2}}{1 - \frac{a \cdot b}{4}} \\ &= \frac{2a + 2b}{4 - ab}, \text{ 將 ③ 代入分子} \\ &= \frac{4 - ab}{4 - ab} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \because 0 < a < 2 \\ 0 < b < 2 \\ 0 < ab < 4 \end{aligned}$$

$\therefore$ 分母為 0 的情況
不存在

$\therefore \alpha + \beta = 45^\circ, \theta = 45^\circ$ 得證 #

清楚完整, 簡明扼要!

10/10
Good!

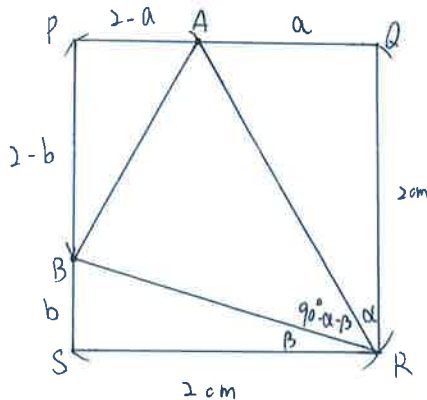
陽明論數 答案紙

第 18 期 本期發布日期: 2023.10.11
 班級: 202 座號: 29 姓名: 王妍甄

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。



設 $\overline{AQ} = a \text{ cm}$, $\overline{BS} = b \text{ cm}$, $\angle ARQ = \alpha^\circ$, $\angle BRS = \beta^\circ$

$$\tan(45^\circ - \alpha) = \frac{1 - \frac{a}{2}}{1 + \frac{a}{2}} = \frac{2-a}{2+a}$$

$$\tan(45^\circ - \beta) = \frac{1 - \frac{b}{2}}{1 + \frac{b}{2}} = \frac{2-b}{2+b}$$

當三角形 PAB 周長為 4 時:

$$(2-a) + (2-b) + \overline{AB} = 4$$

$$\Rightarrow 4 - a - b + \overline{AB} = 4$$

$$\Rightarrow a + b = \overline{AB}$$

且三角形 PAB 為直角三角形

故由畢式定理可知:

$$\sqrt{(2-a)^2 + (2-b)^2} = \overline{AB}$$

$$\text{代} \wedge \overline{AB} = a + b \Rightarrow (2-a)^2 + (2-b)^2 = (a+b)^2$$

$$\Rightarrow 4 - 2a + a^2 + 4 - 2b + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\Rightarrow -2ab - 2(a+b) + 8 = 0$$

$$\Rightarrow 8 - 2ab = 2(a+b)$$

$$\tan \angle ARB = \tan(90^\circ - \alpha - \beta)$$

$$= \tan[(45^\circ - \alpha) + (45^\circ - \beta)]$$

$$= \frac{\left(\frac{2-a}{2+a}\right) + \left(\frac{2-b}{2+b}\right)}{1 - \left(\frac{2-a}{2+a}\right)\left(\frac{2-b}{2+b}\right)}$$

$$= \frac{(2-a)(2+b) + (2-b)(2+a)}{(2+a)(2+b) - (2-a)(2-b)}$$

$$= \frac{4 - 2a + 2b - ab + 4 - 2b + 2a - ab}{4 + 2(a+b) + ab - (4 - 2(a+b) + ab)}$$

$$= \frac{8 - 2ab}{2(a+b) + 2ab}$$

$$\text{代} \wedge 8 - 2ab = 2(a+b) \Rightarrow \frac{8 - 2ab}{2(a+b) + 2ab} = 1$$

$$\therefore 0^\circ \leq \angle ARB \leq 90^\circ$$

$$\therefore \tan \angle ARB \text{ 為 } 1 \text{ 時 } \angle ARB = 45^\circ$$

使用和導角用的相當漂亮, 十分出色!

惟角度一下子是 α , 一下子是 β , 稍有瑕疵, 下次會更好!

9/10

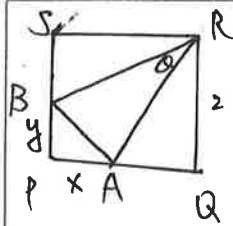
陽明論數 答案紙

第 11 期 本期發布日期: 2023.10.11
 班級: 303 座號: 21 姓名: 楊承倫

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。



$$x^2 + y^2 = AB^2$$

$$x + y + AB = 4$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = AB^2 - 8AB + 16$$

$$xy = 8 - 4AB$$

$$= 4(x + y - 2)$$

$$(2 \times 2) - \left(\frac{1}{2}xy + \frac{2(2-y)}{2} + \frac{2(2-x)}{2} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{(2-x)^2 + 4} \sqrt{(2-y)^2 + 4} \sin \theta$$

可以先行證明
 $\triangle ABR = \square PQRS - \triangle ABP - \triangle AQR - \triangle BSR$

* ①

$$(2-y)(2-x)$$

$$= 4 - 2x - 2y + xy$$

$$= 2x + 2y - 4$$

$$4 - (x + y) = \frac{1}{2} \sqrt{(2-y)^2 + 4} \sqrt{(2-x)^2 + 4} \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{4(x+y-2)^2 + 4(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 - 4y + 4) + 16} \sin \theta$$

$$= \sqrt{(x+y-2)^2 + (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) + 4} \sin \theta$$

* ②

$$(x+y-2)^2 = x^2 + y^2 + 4 - 4x - 4y + 2xy$$

$$= x^2 + y^2 + 4x + 4y - 12$$

$$= \sqrt{2x^2 + 2y^2} \sin \theta$$

* ③

$$(4 - x - y)^2 = x^2 + y^2$$

$$(4 - x - y)^2 = (2x^2 + 2y^2) \sin^2 \theta$$

$$\frac{x^2 + y^2}{2(x^2 + y^2)} = \sin^2 \theta$$

$$\frac{1}{2} = \sin^2 \theta$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = 45^\circ, 135^\circ$$

$$\theta = 45^\circ \#$$

10/10

利用三角函數與面積公式，完整證明出結論，十分出色！

隨切入算式前建議說明算式原因。

陽明論數 答案紙

第 18 期 本期發布日期: 2023.10.11
 班級: 209 座號: 6 姓名: 陳詩豪

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

$\angle PAB$ 為 θ , $BS=b$, $AQ=a$.
 則 $PB=2-b$, $PA=2-a$.
 又 $\triangle PAB$ 周長 $=4 \Rightarrow AB=4-[(2-b)+(2-a)]=a+b$.
 在 $\triangle RAB$ 中
 $\vec{RA}=(2,a)$, $\vec{RB}=(b,2)$
 $\Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{RA} \cdot \vec{RB}}{|\vec{RA}| |\vec{RB}|} = \frac{2a+2b}{\sqrt{a^2+4} \cdot \sqrt{b^2+4}}$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta$ 取正)
 Δ 面積 $= \frac{1}{2} |\vec{RA}| |\vec{RB}| \sin \theta = \frac{1}{2} \left| \frac{\vec{RA}}{\vec{RB}} \right|$
 $= \frac{1}{2} \left| \frac{2a}{b} \right| = \frac{1}{2} |4-ab|$
 ($ab < 4, \therefore 4-ab > 0$)
 $= \frac{1}{2} (4-ab)$
 $\Rightarrow \frac{1}{2} (4-ab) = \frac{1}{2} \sqrt{a^2+4} \sqrt{b^2+4} \sin \theta$
 $\sin \theta = \frac{4-ab}{\sqrt{a^2+4} \sqrt{b^2+4}} \Rightarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{4-ab}{2a+2b}$
 在 $\triangle PAB$ 中
 $(a+b)^2 = (2-a)^2 + (2-b)^2$
 $a^2 + 2ab + b^2 = (4-4a+a^2) + (4-4b+b^2)$
 $a^2 + 2ab + b^2 = 8-4a-4b+a^2+b^2$
 $ab = 4-2a-2b$
 $2a+2b = 4-ab$
 $\frac{4-ab}{2a+2b} = 1 \Rightarrow \tan \theta = \frac{4-ab}{2a+2b} = 1$
 $\theta = \frac{\pi}{4}$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) $\Rightarrow$ 得證: 當 $\triangle PAB$ 周長為 4 時 $\angle ARB = \theta$ 恒為 45°

步驟分明, 流暢清楚, 相當完整! + 分出色!