

積分榜

第 19 期 積分榜

陽明論數		第19期
班級	姓名	積分
201	吳0豫	10
201	李0鈞	10
204	林0澄	10
309	陳許0燦	10
103	曹0銘	8
303	游0緒	8

總積分前 10 名

班級	姓名	積分
陽明論數	積分榜	16-19期
204	林0澄	40
303	游0緒	36
309	陳許0燦	36
303	楊0倫	27
303	薛0灝	20
103	曹0銘	18
201	吳0豫	17
201	李0鈞	17
113	羅0翊	16
210	陳0男	10
310	張0于	10

陽明論數第 19 期總評

本期題目主要為針對多項式展開、除法原理、排列組合作依統整應用，需完善的討論、尋找規律、進一步解題。

在做條件二 $f(x)$ 可被 $x^3 + x^2 + x + 1$ 整除的分析中，同學提出展開比較係數、長除法、餘式定理等三種面向的方法，令人讚賞。

參考詳解提供比較係數、長除法、餘式定理三方法，PDF 檔最後會附上幾位撰寫優良同學的寫法供參考：比較係數(201 吳同學、309 陳許同學)、長除法(201 李同學)、餘式定理(204 林同學)

①201 吳同學，利用比較係數，找出各項係數的關係，再利用排列子組合進行方法數的討論，過程中思慮清楚、善用所學知識

②309 陳許同學，亦是利用比較係數，值得一題的是陳許同學在討論方法數時利用列表、層次井然、非常清晰，深具可讀性。

③201 李同學，利用長除法餘式為零，找出各項係數的關係，在討論解的可能性時，能先針對 p_4 的範圍做出界定，且敘述流暢非常完整。

④204 林同學，多位投稿者中唯一使用因式分解、餘式定理，手法嫻熟，後續討論亦清楚明瞭，作法令令人驚艷。

⑤103 曾同學，各項係數的討論正確，也有排列組合計數討論的基礎，但忽略係數交換的可能性(2^3)，稍嫌可惜。

⑥303 游同學，各項係數的討論正確，也有排列組合計數、討論明白，但忽略排列(乘上 $3!$)，稍嫌可惜。

3.第 19 期滿分同學：204 林同學、309 陳許同學、201 李同學、204 林同學 都將獲得陽明論數徽章，歡迎同學於任意時間來數學科辦公室找賴瑞琪老師，領取徽章與原稿，可製作學習歷程檔案。學期末會頒發戳章證書，期末總積分前十分另有獎狀。

陽明論數

第 19 期 20231023

主辦單位：桃園市立陽明高中數學科
2023.10.23 公佈，2023.11.02 中午 12 點 30 分截止

本期問題：

有多少個多項式 $f(x) = x^7 + p_1x^6 + p_2x^5 + p_3x^4 + p_4x^3 + p_5x^2 + p_6x + p_7$ 同時滿足下面兩個條件？

(1) $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7$ 是集合 $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ 中的相異七個元素。

(2) $f(x)$ 可被 $x^3 + x^2 + x + 1$ 整除。

[解答]

利用長除法

$$\text{得 } f(x) = x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7$$

$$= (x^2 + x + 1)[x^4 + (a_1 - 1)x^3 + (a_2 - a_1)x^2 + (a_3 - a_2)x + (a_4 - a_3 + 1)]$$

$$+ (a_5 - a_4 + a_1 - 1)x^2 + (a_6 - a_4 + a_2 - 1)x + (a_7 - a_4 + a_3 - 1)$$

因為 $f(x)$ 可被 $x^3 + x^2 + x + 1$ 整除，

$$\text{所以餘式 } (a_5 - a_4 + a_1 - 1)x^2 + (a_6 - a_4 + a_2 - 1)x + (a_7 - a_4 + a_3 - 1) = 0,$$

$$\text{可得 } \begin{cases} a_5 - a_4 + a_1 - 1 = 0 \\ a_6 - a_4 + a_2 - 1 = 0 \\ a_7 - a_4 + a_3 - 1 = 0 \end{cases},$$

整理後得 $a_5 + a_1 = a_6 + a_2 = a_7 + a_3 = a_4 + 1$ 。

又必須在 $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ 中選出相異七個元素，

因此令 $a_5 + a_1 = a_6 + a_2 = a_7 + a_3 = a_4 + 1 = k$

a_4 可能為 8、9、10、...、20；此時 k 分別為 9、10、11、...、21。

分別討論

(1) $a_4=8$ 時， $k=9$ ($a_5+a_1=a_6+a_2=a_7+a_3=9$)，

因此 $(a_5, a_1) \cdot (a_6, a_2) \cdot (a_7, a_3)$ 三組數有 $(2, 7) \cdot (3, 6) \cdot (4, 5)$ ，3 種可能方法數共有

$$C_3^3 \times 3! \times 2^3$$

(2) $a_4=9$ 時， $k=10$ ($a_5+a_1=a_6+a_2=a_7+a_3=10$)，

三組數共有 $(2, 8) \cdot (3, 7) \cdot (4, 6)$ ，3 種可能，方法數共有 $C_3^3 \times 3! \times 2^3$

(3) $a_4=10$ 時， $k=11$ ($a_5+a_1=a_6+a_2=a_7+a_3=11$)，

三組數共有 $(2, 9) \cdot (3, 8) \cdot (4, 7) \cdot (5, 6)$ ，4 種可能，方法數： $C_3^4 \times 3! \times 2^3$

(4) $a_4=11$ 時， $k=12$ ($a_5+a_1=a_6+a_2=a_7+a_3=12$)，

三組數共有 $(2, 10) \cdot (3, 9) \cdot (4, 8) \cdot (5, 7)$ ，4 種可能，方法數： $C_3^4 \times 3! \times 2^3$

(5) $a_4=12 \sim 13$ 時， $k=13 \sim 14$ ($a_5+a_1=a_6+a_2=a_7+a_3=13 \sim 14$)，三組數皆有 5 種可能，

$$\text{方法數: } C_3^5 \times 3! \times 2^3$$

(6) $a_4=14 \sim 15$ 時， $k=15 \sim 16$ ，三組數皆有 6 種可能，方法數： $C_3^6 \times 3! \times 2^3$

(7) $a_4=16 \sim 17$ 時， $k=17 \sim 18$ ，三組數皆有 7 種可能，方法數： $C_3^7 \times 3! \times 2^3$

(8) $a_4=18 \sim 19$ 時， $k=19 \sim 20$ ，三組數皆有 8 種可能，方法數： $C_3^8 \times 3! \times 2^3$

(9) $a_4=20$ 時， $k=21$ ，三組數有 9 種可能，方法數： $C_3^9 \times 3! \times 2^3$

因此

$$\text{方法數共: } 2 \times 3! \times 2^3 \times (C_3^3 + C_3^4 + C_3^5 + C_3^6 + C_3^7 + C_3^8) + C_3^9 \times 3! \times 2^3$$

$$= 2 \times 3! \times 2^3 \times (C_4^9) + C_3^9 \times 3! \times 2^3 = 16128$$

陽明論數 答案紙

第 19 期 本期發布日期: 2023.10.23
 班級: 204 座號: 09 姓名: 林星澄

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

$$\text{令降式 } x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2+1) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ 或 } x^2 = -1$$

$$(1) f(-1) = 0$$

$$(-1)^7 + P_1(-1)^6 + P_2(-1)^5 + P_3(-1)^4 + P_4(-1)^3 + P_5(-1)^2 + P_6(-1) + P_7 = 0$$

$$P_1 + P_3 + P_5 + P_7 = P_2 + P_4 + P_6 + 1 \quad \text{--- ①}$$

$$(2) x^2 = -1 \text{ 代入 } f(x) \Rightarrow f(x) = 0$$

$$(-1)^3 x + P_1(-1)^3 + P_2(-1)^2 x + P_3(-1)^2 + P_4(-1)x + P_5(-1) + P_6 x + P_7 = 0$$

$$(-1 + P_2 - P_4 + P_6)x + (-P_1 + P_3 - P_5 + P_7) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 + P_2 - P_4 + P_6 = 0 \\ -P_1 + P_3 - P_5 + P_7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_2 + P_6 = P_4 + 1 \\ P_3 + P_7 = P_1 + P_5 \end{cases} \quad \text{--- ②}$$

$$(2) \text{ 代入 ①} \Rightarrow 2(P_1 + P_5) = 2(P_4 + 1), P_1 + P_5 = P_4 + 1 \quad \text{--- ③}$$

$$\text{綜合 ②、③ 得} \Rightarrow P_1 + P_5 = P_2 + P_6 = P_3 + P_7 = P_4 + 1$$

滿足 $f(x)$ 之各項係數 (降冪排列) $\langle 1, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 \rangle$ 計有:

① $P_4 = 8$ 時,

$$8+1 = 2+7 = 3+6 = 4+5 \Rightarrow P_3^3 \times 2^3 \text{ 個}$$

多項式 $f(x)$ 共有:

同理:

$$\text{② } P_4 = 9 \Rightarrow P_3^3 \times 2^3 \text{ 個} \quad \text{④ } P_4 = 16 \Rightarrow P_3^4 \times 2^3 \text{ 個}$$

$$\text{③ } P_4 = 10 \Rightarrow P_3^4 \times 2^3 \text{ 個} \quad \text{⑤ } P_4 = 17 \Rightarrow P_3^4 \times 2^3 \text{ 個}$$

$$\text{④ } P_4 = 11 \Rightarrow P_3^4 \times 2^3 \text{ 個} \quad \text{⑥ } P_4 = 18 \Rightarrow P_3^5 \times 2^3 \text{ 個}$$

$$\text{⑤ } P_4 = 12 \Rightarrow P_3^5 \times 2^3 \text{ 個} \quad \text{⑦ } P_4 = 19 \Rightarrow P_3^5 \times 2^3 \text{ 個}$$

$$\text{⑥ } P_4 = 13 \Rightarrow P_3^5 \times 2^3 \text{ 個} \quad \text{⑧ } P_4 = 20 \Rightarrow P_3^6 \times 2^3 \text{ 個}$$

$$\text{⑦ } P_4 = 14 \Rightarrow P_3^6 \times 2^3 \text{ 個}$$

$$\text{⑧ } P_4 = 15 \Rightarrow P_3^6 \times 2^3 \text{ 個}$$

$$\begin{aligned} & 2(P_3^3 \times 2^3 + P_3^4 \times 2^3 + P_3^5 \times 2^3 + P_3^6 \times 2^3 + P_3^7 \times 2^3 + P_3^8 \times 2^3) \\ & + P_3^9 \times 2^3 \\ & = 2^4 \times 3! (C_3^3 + C_3^4 + C_3^5 + C_3^6 + C_3^7 + C_3^8) + P_3^9 \times 2^3 \\ & = 2^4 \times 3! \times C_4^9 + P_3^9 \times 2^3 \\ & = 16 \times 6 \times \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} + 9 \times 8 \times 7 \times 8 \\ & = 12096 + 4032 = 16128 \text{ 個} \end{aligned}$$

① 因式分解, 善用餘式定理, 作法令人驚豔, good!

② 討論清晰且完整... 一目了然!
 板面。

陽明論數 答案紙

第 19 期 本期發布日期: 2023/10/27
班級: 309 座號: 6 姓名: 陳詩宇燦

主辦單位：桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1：請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2：請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

Ex. 7.

$$f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

$$= x^7 + (a+1)x^6 + (a+b+1)x^5 + (a+b+c+1)x^4 + (a+b+c+d)x^3 + (b+c+d)x^2 + (c+d)x + d.$$

$$\Rightarrow p_1 = a + 1$$

$$p_2 = a + b + 1$$

$$P_3 = a + b + c + 1$$

$$p_4 = a + b + c + d$$

$$p_5 = b + c + d$$

$$P_6 = c + d$$

$$p_7 = d.$$

$$\Rightarrow p_1 + p_5 = p_2 + p_6 = p_3 + p_7 = p_4 + 1.$$

P4	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
P1+P5											
P2+P6	20+1=21	19+1=20	18+1=19	17+1=18	16+1=17	15+1=16	14+1=15	13+1=14	12+1=13	11+1=12	10+1=11
P3+P7											
可能值	2+19 3+18 4+17 ⋮ 10+11	2+18 3+17 4+16 ⋮ 9+11	2+17 3+16 4+15 ⋮ 9+10	2+16 3+15 4+14 ⋮ 8+10	2+15 3+14 4+13 ⋮ 8+9	2+14 3+13 4+12 ⋮ 7+9	2+13 3+12 4+11 ⋮ 7+8	2+12 3+11 4+10 ⋮ 6+8	2+11 3+10 4+9 ⋮ 6+7	2+10 3+9 4+8 5+7	2+9 3+8 4+7 5+6
組	9	8	8	7	7	6	6	5	5	4	4

共 $C_3^9 \cdot 3! \cdot (2!)^3 + 2 \left[C_3^8 \cdot 3! \cdot (2!)^3 + C_3^7 \cdot 3! \cdot (2!)^3 + C_3^6 \cdot 3! \cdot (2!)^3 + C_3^5 \cdot 3! \cdot (2!)^3 + C_3^4 \cdot 3! \cdot (2!)^3 + C_3^3 \cdot 3! \cdot (2!)^3 \right]$

$= 16128$

逐一列舉討論，非常清楚
(深具層次，令人容易解讀)

P4	9	8	7
P1+P5			
P2+P6	9+1=10	8+1=9	7+1=8
P3+P7			
可能值	2+8 3+7 4+6	2+7 3+6 4+5	2+6 3+5
組	3	3	2(從3組)

=16128. 逐一系列讨论, 非常清楚
(层次清楚, 令人容易解讀)

陽明論數 答案紙

第 19 期 本期發布日期: 23/11/02
 班級: 201 座號: 6 姓名: 李庭鈞

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

$$f(x) = x^7 + P_1 x^6 + P_2 x^5 + P_3 x^4 + P_4 x^3 + P_5 x^2 + P_6 x + P_7$$

$$= q(x)(x^3 + x^2 + x + 1)$$

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	1111
$P_1 - 1$	$P_2 - 1$	$P_3 - 1$	P_4				$P_1 - 1$
$P_2 - P_1$	$P_3 - P_1$	$P_4 - P_1$	$P_5 - P_1$				$P_2 - P_1$
$P_3 - P_2$	$P_4 - P_2$	$P_5 - P_2$	$P_6 - P_2$				$P_3 - P_2$
$P_4 - P_3$	$P_5 - P_3$	$P_6 - P_3$	$P_7 - P_3$				$P_4 - P_3$

由此分解可得

$$\begin{cases} P_5 - P_3 + P_1 = P_4 - P_3 + 1 \\ P_6 - P_3 + P_2 = P_4 - P_3 + 1 \\ P_7 = P_4 - P_3 + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_4 + 1 = P_5 + P_1 = P_6 + P_2 = P_7 + P_3$$

$$P_n = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$$

$$1 \leq P_n \leq 20$$

$$2 \leq P_4 + 1 \leq 21$$

$$P_n = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$$

$$P_4 + 1 = P_5 + P_1 = P_6 + P_2 = P_7 + P_3$$

$$\text{good } 9 \leq P_4 + 1 \leq 21$$

$$\text{故可得 } 9 \leq P_4 + 1 \leq 21$$

$$\text{令 } k = P_4 + 1 = P_5 + P_1 = P_6 + P_2 = P_7 + P_3 (9 \leq k \leq 21)$$

$$\text{when } k=9 \text{ or } 10, P_1 \sim P_7 \text{ 有 } 2^3 \text{ 種可能}$$

$$\text{when } k=11 \text{ or } 12, P_1 \sim P_7 \text{ 有 } 2^4 \text{ 種可能}$$

$$\vdots$$

$$\text{when } k=19 \text{ or } 20, P_1 \sim P_7 \text{ 有 } 2^5 \text{ 種可能}$$

$$\text{when } k=21, P_1 \sim P_7 \text{ 有 } 2 \times 2^5 \text{ 種可能}$$

$$2^3 (2 \times P_3^3 + 2 \times P_3^4 + \dots + 2 \times P_3^8 + P_3^9)$$

$$= 2^3 [2(P_3^3 + P_3^4 + P_3^5 + P_3^6 + P_3^7 + P_3^8) + P_3^9]$$

$$= 8 \times (2 \times 128 + 504)$$

$$8 \times 2016 = 16128 \#$$

Ans: 16128 種

- ① 有清楚說明 P_4 之範圍, 並進行討論
- ② 敘述因果邏輯清楚
- ③ 能利用多項式的係數去求值

陽明論數 答案紙

第 19 期 本期發布日期: 23/11/02
 班級: 201 座號: 4 姓名: 吳松筠

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

$$f(x) = x^7 + p_1 x^6 + p_2 x^5 + p_3 x^4 + p_4 x^3 + p_5 x^2 + p_6 x + p_7$$

$$= (x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d)(x^3 + x^2 + x + 1)$$

1 =

$$p_1 = 1 + a$$

$$p_2 = 1 + a + b$$

$$p_3 = 1 + a + b + c$$

$$p_4 = a + b + c + d$$

$$p_5 = b + c + d$$

$$p_6 = c + d$$

$$p_7 = d$$

$$\Rightarrow 1 + p_2 + p_4 + p_6 = p_1 + p_3 + p_5 + p_7$$

$$1 + p_3 + p_4 + p_7 = p_1 + p_2 + p_5 + p_6$$

$$1 + p_1 + p_4 + p_5 = p_2 + p_3 + p_6 + p_7$$

$$1 + p_4 = p_2 + p_6 = p_3 + p_7 = p_1 + p_5$$

$$1 + p_4 = p_2 + p_6, p_3 + p_7 = p_1 + p_5$$

$$9 \Rightarrow \begin{matrix} 8 & 6 & 3 & 7 & 2 & 5 & 4 \end{matrix}$$

$$10 \Rightarrow \begin{matrix} 9 & 7 & 3 & 8 & 2 & 6 & 4 \end{matrix}$$

$$11 \Rightarrow \begin{matrix} 8 & 3 & 9 & 2 & 7 & 4 \\ & 5 & 6 & & & \end{matrix}$$

$$12 \Rightarrow \begin{matrix} 9 & 3 & 10 & 2 & 8 & 4 \\ & 7 & 5 & & & \end{matrix}$$

$$C_3^3 \times 2^3 \times 3!$$

$$C_3^4 \times 2^3 \times 3!$$

$$\Rightarrow n(f(x)) = 2 \times 3! \times 2^3 (C_3^3 + C_3^4 + C_3^5 + \dots + C_3^8 + \frac{1}{2} C_3^9)$$

$$= 96 (C_3^4 + C_3^5 + \dots + C_3^8 + \frac{1}{2} C_3^9)$$

$$= 96 (C_4^9 + \frac{1}{2} C_3^9) = 96 \times 168 = 16128$$

good.

$$A = 16128$$

①訂論提要.

②善用數學符號, 巴夏卡定理.

(0)