

積分榜

第 19 期 積分榜

陽明論數		第20期
班級	姓名	積分
201	吳0豫	10

總積分前 10 名

班級	姓名	積分
陽明論數	積分榜	16-20期
204	林0澄	40
303	游0緒	36
309	陳許0燦	36
201	吳0豫	27
303	楊0倫	27
303	薛0灝	20
103	曹0銘	18
201	李0鈞	17
113	羅0翊	16
210	陳0男	10
310	張0于	10

陽明論數第 20 期總評

1.本期特別表揚 201 吳同學，腦袋靈活，數感敏銳，寫出了很不錯的方法，最後將附上兩個參考解法以及吳同學的解法供有興趣同學參考。另外很多同學有猜測出答案，但過程皆有失嚴謹，有同學以前幾項狀況認為有某些規則，其實並沒有。另有同學誤用數學歸納法。都非常可惜，但勇於思考嘗試的想法，還是值得鼓勵嘉許。

2.第 20 期滿分同學：201 吳同學獲得陽明論數徽章。歡迎有投稿同學於任意時間來數學科辦公室找賴瑞琪老師，領取徽章與原稿，可製作學習歷程檔案。學期末會頒發戳章證書，期末總積分前十分另有獎狀。

陽明論數

第廿期 20231106

主辦單位：桃園市立陽明高中數學科
2023.11.06 公佈，2023.11.17 中午 12 點 30 分截止

本期問題：

已知數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2023}$ 都是整數，且數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ |a_{n+1}| = |a_n + 1| \text{ 其中 } n=1, 2, 3, \dots, 2022 \end{cases}$$

試求 $|a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2023}|$ 的最小值。

[參考詳解]

<法一>

$$|a_{n+1}| = |a_n + 1| \Rightarrow |a_{n+1}|^2 = |a_n + 1|^2 \Rightarrow a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2a_n + 1$$

設 $|a_{2024}| = |a_{2023} + 1|$ 且 a_{2024} 為奇數

$$\text{則 } a_1^2 = 0$$

$$a_2^2 = a_1^2 + 2a_1 + 1$$

$$a_3^2 = a_2^2 + 2a_2 + 1$$

$$\vdots$$

$$+) a_{2024}^2 = a_{2023}^2 + 2a_{2023} + 1$$

$$a_{2024}^2 = 2(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2023}) + 2023$$

$$\Rightarrow |a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2023}| = \left| \frac{a_{2024}^2 - 2023}{2} \right|$$

取奇數平方最接近 2023 者： $43^2 = 1849$ ， $45^2 = 2025$

則當 $a_{2024} = 45$ ，所求最小值為 1

<法二>

直接造出滿足條件的數列：

$a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2t-1}$ 取值為 0

$a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2t}$ 取值為 -1

接下來的 $k+1$ 項 $a_{2t+1}=0, a_{2t+2}=1, a_{2t+3}=2, \dots, a_{2023}=k$ 其中 k 為偶數

$$\text{則 } t = \frac{2023 - (k+1)}{2}$$

$$\text{前 } 2t \text{ 項的總和 } -\frac{2023 - (k+1)}{2} = -\frac{2022 - k}{2}$$

$$\text{後 } k+1 \text{ 項的總和 } \frac{k(k+1)}{2}$$

當所求有最小值時，亦即 $\frac{2022-k}{2}$ 最接近 $\frac{k(k+1)}{2}$

$$\text{令 } \frac{2022-k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2022 = k^2 + 2k$$

$$\Leftrightarrow 2023 = (k+1)^2$$

取奇數平方最接近 2023 者： $43^2 = 1849$ ， $45^2 = 2025$ ，得出 $k+1=45 \Rightarrow k=44$

$$\text{因此最小值為 } k=44 \text{ 代入 } \left| -\frac{2022-k}{2} + \frac{k(k+1)}{2} \right| = 1$$

答：1

陽明論數 答案紙

第 20 期 本期發布日期：
 班級：201 座號：4 姓名：吳松福

主辦單位：桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1：請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2：請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ |a_{n+1}| = |a_n + 1|, n = 1, 2, \dots, 2022 \end{cases}$$

為了使 $|a_1 + a_2 + \dots + a_{2023}|$ 有最小值
 使算式裡有些組合相加為零

$$\Rightarrow a_1 = 0$$

設 d_n 為第 n 組合

$$a_2 + a_3 + a_4 = (-1) + 0 + 1 = 0$$

$$a_5 + \dots + a_9 = (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow d_1 = 0, \Rightarrow 1 \text{ 個}$$

$$d_2 = (-1) + 0 + 1 \Rightarrow 3 \text{ 個}$$

$$d_3 = (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 \Rightarrow 5 \text{ 個}$$

$$d_n = [-(n-1)] + \dots + 0 + \dots + (n-1) \Rightarrow (2n-1) \text{ 個}$$

$$\Rightarrow \frac{n[1+(2n-1)]}{2} \leq 2023$$

$$n^2 \leq 2023$$

$$n \leq 44. \dots$$

$\Rightarrow$ 有 44^2 個 a_n 相加為零

$\Rightarrow$ 有 $(2023 - 44^2)$ 個 a_n 相加不為零
 $= 87$

$$d_{44} = (-43) + \dots + 0 + \dots + 43$$

$\therefore d_{44}$ 後相加不為零

$\therefore$ 利用數字交差的特性
 使 d_{44} 後的 a_n 相加
 有最小值

$$\Rightarrow 43,$$

$$\begin{aligned} & (44, -45, 44, -45 \\ & \dots, 44, -45, 44 \end{aligned}$$

相加為

$$= \frac{(44-45)(87-1)}{2}$$

$$= -43$$

$$\Rightarrow |a_1 + a_2 + \dots + a_{2023}|$$

$$\stackrel{\min}{=} |(-43) + 44| = 1$$

$$A = 1$$