

積分榜

第 27 期 積分榜

陽明論數		27期
班級	姓名	積分
103	曹○○	10
103	曾○○	10
303	游○○	10

總積分榜

陽明論數	23-27期	總積分榜
班級	姓名	積分
303	游○○	49
201	吳○○	40
201	鄒○○	40
201	李○○	38
103	曹○○	38
301	徐○○	30
309	陳許○○	29
103	曾○○	28
310	張○○	20
202	王○○	10
306	莊○○	10
307	章○○	9

陽明論數第 27 期總評

1. 本次投稿同學偏少，只有 3 位，這次的題目有三個概念，可能有些同學有解出一部份，但沒能完全解出，如果只寫出一部份也可以繳交，也可獲得部分分數，無論是否成功解出，有認真思考如何解題，就是一個很好的腦力激盪，後面附參考答案供有興趣的同學思考。
2. 本次投稿的 3 位投學答題都非常完整清晰，整體與後面所附的方法大致相同，可見對各概念相當熟稔並能融會貫通，無論是整數論的質數因數倍數，還是帶根號的函數求極值，或是排列組合的思考與討論，都做得很到位，值得嘉獎。
3. 第 27 期滿分同學都將獲得陽明論數徽章，歡迎同學於任意時間來數學科辦公室 找賴瑞琪老師，領取徽章與原稿，可製作學習歷程檔案。學期末會頒發戳章證書，總積分前十分另有獎狀。

陽明論數

第廿七期 20240422

本期問題：

多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ，其中 n 為正整數， $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ 皆為整數。

已知 p 為質數，且 $f(p) = 1911$ 、 $f(8) = 2024$ 。設 $g(x) = x^2 + 2\sqrt{p-x^2} + 3$ 的最大值為 M ，今從

$\{-1, 3, M\}$ 中重複取出 15 個數 $b_1, b_2, \dots, b_{14}, b_{15}$ ，若 $b_1 + b_2 + \cdots + b_{14} + b_{15} = 49$ 且

$(b_1 + 5) \times (b_2 + 5) \times \cdots \times (b_{14} + 5) \times (b_{15} + 5) = 2^{44}$ ，求 $b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{14}^2 + b_{15}^2 = ?$

[參考解答]

步驟 1

$$f(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 1911 \cdots (1)$$

$$f(8) = a_n \times 8^n + a_{n-1} \times 8^{n-1} + \cdots + a_2 \times 8^2 + a_1 \times 8 + a_0 = 2024 \cdots (2)$$

$$(2)-(1) \text{ 得: } a_n \times (8^n - p^n) + a_{n-1} \times (8^{n-1} - p^{n-1}) + \cdots + a_2 \times (8^2 - p^2) + a_1 \times (8 - p) = 113 \cdots (3)$$

$$\because \alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \alpha^{n-3}\beta^2 + \cdots + \alpha^2\beta^{n-3} + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1})$$

$$\therefore (8^n - p^n) \cdot (8^{n-1} - p^{n-1}) \cdots (8^2 - p^2) \cdot (8 - p) \text{ 皆有 } (8 - p) \text{ 的因式}$$

$$\text{因此 (3) 式可整理成: } (8 - p) \times (\text{某一整數}) = 113$$

由上式可知， $(8 - p)$ 應為 113 的因數，113 的因數只有 $\pm 1, \pm 113$

$$8 - p = \pm 1, \pm 113 \Rightarrow p = 7 \text{ (9, 121 不是質數, -105 是負數)}$$

步驟 2

$$g(x) = x^2 + 2\sqrt{7-x^2} + 3, \text{ 令 } t = \sqrt{7-x^2} \geq 0, \text{ 則 } t^2 = 7-x^2 \Rightarrow x^2 = 7-t^2$$

$$\text{將 } x \text{ 換成 } t, g(t) = 7 - t^2 + 2t + 3 = -(t-1)^2 + 11$$

$$\text{當 } t=1 \text{ (即 } x^2=6 \text{)} \text{ 時, 可得最大值 } M=11$$

步驟 3

$\{-1, 3, 11\}$ 中重複取出 15 個數，假設數字 3 取 c 個，數字 11 取 d 個，數字 -1 取 $15-c-d$ 個。

$$\because b_1 + b_2 + \cdots + b_{14} + b_{15} = 49 \Rightarrow 3c + 11d + (-1)(15-c-d) = 49 \Rightarrow 4c + 12d = 64 \Rightarrow c + 3d = 16$$

$$\because (b_1 + 5) \times (b_2 + 5) \times \cdots \times (b_{14} + 5) \times (b_{15} + 5) = 2^{44} \text{ 且已知 } \{-1+5, 3+5, 11+5\} = \{4, 8, 16\} = \{2^2, 2^3, 2^4\}$$

$$\therefore (2^3)^c \times (2^4)^d \times (2^2)^{15-c-d} = 2^{44} \Rightarrow 3c + 4d + 2(15-c-d) = 44 \Rightarrow c + 2d = 14$$

$$\begin{cases} c + 3d = 16 \\ c + 2d = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 10 \\ d = 2 \end{cases}$$

數字 3 取到 10 個，數字 11 取到 2 個，數字 -1 取到 3 個。

$$b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{14}^2 + b_{15}^2 = (3)^2 \times 10 + (11)^2 \times 2 + (-1)^2 \times 3 = 335$$

答：335