

積分榜

第 33 期 積分榜

33期		積分
301	吳OO	10
301	鄒OO	10
207	詹OO	10
110	劉O	2
302	王OO	2
309	李OO	2

積分榜前十名

積分榜	30-33期	總積分
301	吳OO	30
301	鄒OO	20
102	蕭OO	16
207	詹OO	15
110	何OO	14
102	梁OO	10
109	陳OO	10
310	陳OO	10
302	王OO	10
212	曹OO	9

陽明論數第 33 期總評

1. 此題二元不等式的組合的思考誤區，許多同學解出 $0 \leq a = \alpha + \beta \leq 3, -2 \leq b = \alpha\beta \leq 2$ ，然後便回答 $a=0, b=2$ 有最小值 $u-3v=0-6=-6$ ，這個部分是錯的喔！因為這兩個不等式會互相影響，譬如 $a = \alpha + \beta = 0, b = \alpha\beta = 2$ 時，利用 $\beta = -\alpha \Rightarrow -\alpha^2 = 2$ 可知無實數解，由此知不可使用這兩個會互相干擾的不等式的線性組合求出答案，需使用其他方式來處理，以下提供參考詳解以及 301 吳同學及鄒同學的解法供有興趣的同學參考。

2. 本期 301 吳同學、鄒同學寫得很好，看得出來對於二元不等式的線性組合有結構了解，清楚明白其不等式互相干擾的細節，而採取強迫分解，使式子整理到可以處理的階段。207 詹同學也很細心逐步討論完成此題，能細心避開二元不等式的組合陷阱。

3. 歡迎投稿同學於任意時間來數學科辦公室 找賴瑞琪老師，探討問題與領取原稿，可將本次思考歷程與最後解答過得的反思製作成學習歷程檔案，未來可用於升學。另外，第 33 期滿分同學將獲得陽明論數徽章，可於任意時間來數學科辦公室 找賴瑞琪老師領取。

陽明論數

第 33 期 20241028

主辦單位：桃園市立陽明高中數學科

2024.10.28(一) 公佈，~~2024.11.08(五)中午 12 點 30 分截止~~

因題目出錯：重新於 2024.11.07 公布，2024.11.15(五)中午 12 點 30 分截止

本期問題：

設 a, b 為實數，方程式 $x^2 - ax + b = 0$ 之兩根為 α, β ，其中 $-1 \leq \alpha \leq 1$ 且 $1 \leq \beta \leq 2$ ，滿足上述條件之

(a, b) 所在區域為 Γ 。假設動點 $P(u, v)$ 為區域 Γ 的某一點，求 $u - 3v$ 的最大值與最小值？

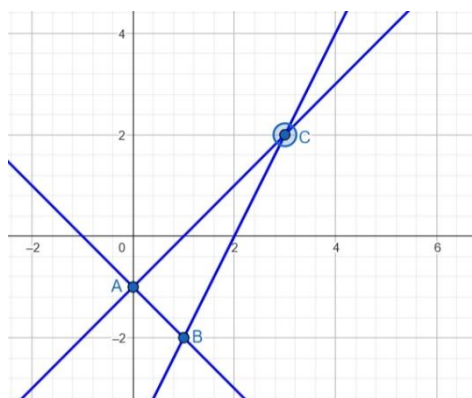
[參考答案]

令 $f(x) = x^2 - ax + b$ ，此二次函數開口向上且兩根 α, β 滿足 $-1 \leq \alpha \leq 1$ 且 $1 \leq \beta \leq 2$

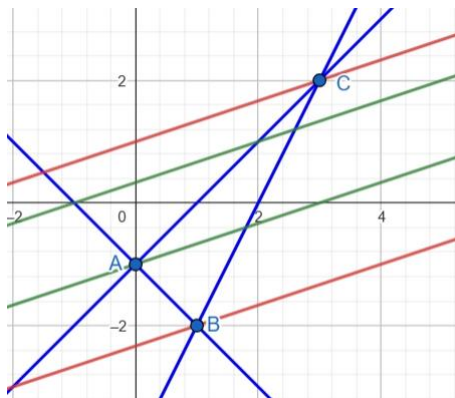
$$\text{故 } \begin{cases} f(-1) \geq 0 \\ f(1) \leq 0 \\ f(2) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + a + b \geq 0 \\ 1 - a + b \leq 0 \\ 4 - 2a + b \geq 0 \end{cases}$$

令直角坐標橫軸為 a ，縱軸為 b ，聯立不等式表圖形為下圖(一)三角形 ABC 內部(含邊界)

其中 $A(0, -1), B(1, -2), C(3, 2)$



圖(一)



圖(二)

由平行線法得知目標 $u - 3v = k$ 為斜率 $\frac{1}{3}$ 的直線

需從目標範圍中選取一點帶入 $u - 3v$

觀察圖(二)，過目標範圍上的點且斜率 $\frac{1}{3}$ 的直線時，

選到最右側的 $B(1, -2)$ ， $u - 3v$ 有最大值 $1 - 3 \times (-2) = 7$

選到最左側的 $C(3, 2)$ ， $u - 3v$ 有最小值 $3 - 3 \times 2 = -3$

陽明論數 答案紙

第 33 期 本期發布日期: 2024/10/28
班級: 301 座號: 姓名:

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

$$\begin{aligned}\text{令 } x^2 - ax + b \\ &= (x - \alpha)(x - \beta) \\ &= x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \alpha + \beta \\ b = \alpha\beta \end{cases} \quad I: \begin{cases} (a, b) = (\alpha + \beta, \alpha\beta) \\ -1 \leq \alpha \leq 1 \wedge 1 \leq \beta \leq 2 \end{cases}$$

∴ 動點 $P(u, v)$ 為區域 I 的某一點

$$\Rightarrow \begin{cases} u = a = \alpha + \beta \\ v = b = \alpha\beta \end{cases}$$

$$\text{令 } u - 3v = t$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta - 3\alpha\beta = t$$

$$(3\alpha - 1)(-\beta + \frac{1}{3}) = t - \frac{1}{3}$$

$$\because \begin{cases} -1 \leq \alpha \leq 1 \\ 1 \leq \beta \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 \leq 3\alpha - 1 \leq 2 \\ -\frac{5}{3} \leq -\beta + \frac{1}{3} \leq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{3} \times 2 \leq (3\alpha - 1)(-\beta + \frac{1}{3}) \leq -\frac{5}{3} \times (-4)$$

$$-\frac{10}{3} \leq t - \frac{1}{3} \leq \frac{20}{3}$$

$$-3 \leq t \leq 7$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} (u - 3v)_{\max} &= 7 \\ (u - 3v)_{\min} &= -3 \end{aligned}$$

$$A: \begin{aligned} \text{最大值} &= 7 \\ \text{最小值} &= -3 \end{aligned}$$

對於二元線性不等式有清楚的概念, 知道不可直接使用 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 的組合 (因為其中 α, β 值會互相影響), 故將問題強迫分解到可討論的單一變數相乘, 可見概念清晰!

陽明論數 答案紙

第 33 期 本期發布日期：2024.10.07
班級：301 座號： 姓名：劉

主辦單位：桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1：請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2：請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

$$x^2 - ax + b = 0$$

$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

$$a = \alpha + \beta ; b = \alpha\beta$$

$$(u, v) = (\alpha + \beta, \alpha\beta)$$

$$u - 3v = -3\alpha\beta + \alpha + \beta = -\frac{1}{3}[(3\alpha - 1)(3\beta - 1) - 1]$$

$$-1 \leq \alpha \leq 1 ; 1 \leq \beta \leq 2 \text{ 代入}$$

$$-4 \leq 3\alpha - 1 \leq 2 ; 2 \leq 3\beta - 1 \leq 5$$

$$-20 \leq (3\alpha - 1)(3\beta - 1) \leq 10$$

$$7 \geq -\frac{1}{3}[(3\alpha - 1)(3\beta - 1) - 1] \geq -3$$

$u - 3v$ 有最大值 7 ; 最小值 -3

A: 最大值: 7 ; 最小值: -3

10/10

對於二元不等式的線性組合有足夠的了解，並能謹慎處理變數之間互相干涉的問題，清楚周全地完成解題，可見心思細膩、邏輯清楚！